安定的なグルーピングについての一ゲーム理論的考察

平瀬　和基

本稿ではいわゆるマッチング問題のひとつのバリエーションとして、これまでの研究文脈ではあまり扱われてこなかったグルーピング問題を定義する。マッチング問題における研究文脈と対比させる形で議論を進め、マッチング問題における解概念である安定性の考え方を用いて、安定グルーピングを定義し、その存在について議論をする。

主要な結果として、マッチング問題では一定の条件の下で安定マッチングの存在が証明されていることに対して、グルーピング問題では同じ条件の下であっても安定グルーピングが存在するとは限らないことを証明する。

論文の後半ではマッチング問題における研究発展を参考に、今後の研究可能性についても議論する。

keywords：マッチング問題，グルーピング問題，プレーヤーについての好み、安定マッチング，安定グルーピング

目　　次

1　イントロダクション

本稿では、マッチング問題のひとつのバリエーションとしてグルーピング問題を定義･考察する。本節では、モデルを定義する前の段階として、マッチング問題とその既存研究で得られている結果を紹介し、それと対比する形でグルーピング問題について説明することで研究のモチベーションを明らかにしたい。

1.1マッチング問題

マッチング問題は、例えば研修医と研修先の病院、新入生と学部、患者とドナーをどのように組み合わせるか（マッチングさせるか）を考えるものである。上に挙げた例は、どれも2つの属性が存在する際のマッチング問題であるが、音楽バンドのボーカルとギターとドラムを組み合わせるというような3つ以上の属性が存在する状況も考えることができる。

そこでは、研修医が研修先の病院について好みをもち、研修先の病院は研修医について好みをもつというように、各主体が他の属性の主体に好みをもつことが想定される。例えば、研修医１は研修先として病院1 $\succ$ 病院2 $\succ$ 病院3[1]という好みをもち、病院1は研修生として研修生1$\succ$ 研修生2$\succ$ 研修生3という好みをもち、研修生2は、･･･といった具合である。

マッチング問題についての研究文脈では、各主体の好みに基づいてマッチングの安定性が定義され、様々な条件の下で安定的なマッチングが存在するのか、安定的なマッチングを実現するにはどのような手順を取れば良いのかといったことが議論されてきた。端緒となったのがGale and Shapley (1962)によるものである。

[1] 〉の使い方について、病院１$\succ$病院２で、病院１を病院２より好むということをあらわすものとする。

Gale and Shapley (1962)は、２属性によるマッチング問題を提起し､問題の解として､安定的なマッチングを定義した。その定義は、互いにマッチングされた相手よりも好ましく思っているペアが存在しない、というものである[2]。Gale and Shapley (1962)は2属性の状況で一般に安定的なマッチングが存在することを示し、また安定的なマッチングを実現する手順についても明らかにした[3]。

この研究は、実際に例に挙げた研修医と病院、新入生と学部、患者とドナーをマッチングさせる際などに応用されており、その成果が認められ、この分野の研究者Alvin RothとLloyd Shapleyには2012年にいわゆるノーベル経済学賞が授与されている。

1.2グルーピング問題

本稿で扱うグルーピング問題は、マッチング問題における属性が存在しない状況を考えるものである。そこでは各主体が自分以外の主体に対して好みをもつことが想定されることになる。例えば、クラスにいる学生たちがグループワークを行うために何人かずつにわかれたり、政党内で会派を構成したりするような状況が考えられる。

先に述べたような、３つ以上の属性が存在する状況でのマッチングについてはNg and Hirschberg (1991) や Eriksson, Sjöstrand, and Strimling (2006)らによる先行研究があり、安定的なマッチングの存在条件なども知られている。属性がない状況を扱っている先行研究はほとんどなく、その点は本稿の独自性であるといえよう。

主体によるグループを作るという点では、Ray (2007)による文献などにあるように、協力ゲームの枠組みで提携形成についての研究蓄積が存在するが、提携によって得られる価値の大きさとその分配に基づいて解が定義･議論されるものが多く、主体に対する好みに基づく定義・議論をしている点も本稿の独自性であると考えられる。

マッチング問題と同じく、グルーピング問題においても安定性を定義し、安定的なグルーピングの存在条件や、存在する際にはそれを実現する手順を明らかにしたいというのが本研究のモチベーションである。現時点では､第２章で示すように、一般に安定的なグルーピングが存在するとは限らないという不可能性が示されているところであり、研究は緒に就いたばかりといえる。

以下、本稿は次のように構成されている。第２節では理論モデルを扱う。マッチング問題と対比させる形でグルーピング問題を定式化し、グルーピングの安定性についても定義する。また、安定マッチング･安定グルーピング･安定的でないマッチング・安定的でないグルーピングを例示する。第3節では、準備した定義に基づき、２属性のケースで安定マッチングの存在定理を紹介し、グルーピング問題について得られた結果として、安定的なグルーピングが常に存在するとは限らないということ示す。第４節では、マッチング問題についての研究文脈を参考にしながら、グルーピング問題についての今後の研究可能性を議論する。

2 モデル

本節では、グルーピング問題の定式化を行う。第1項ではマッチング問題と合わせてグルーピング問題を定義する。また、安定性についても定義をする。マッチング問題についても扱うのは、比較をすることによりグルーピング問題の性質をより明らかにするためである。

2.1定義

$k×n$人のプレーヤーが存在するとし、プレーヤーの集合をIとする。マッチング問題としては、k種類の属性がありそれぞれの属性をもつプレーヤーがn人いる状況、グルーピング問題としては、

[2]例えば、研修医１と病院１、研修医2と病院2がマッチングされているとき、研修医１が病院2を病院1より好ましいと思っていて、病院2が研修医2より研修医1を好ましいと思っているなら、このマッチングは安定的ではないということになる。より厳密な定義については第2章を参照されたい。

[3]２属性のマッチングについては、他にも様々なバリエーションがあり、Roth and Sotomayor (1990)によりまとめられている。またRoth (2015)もマッチング問題やその応用について包括的に扱っている。

プレーヤーをk人ずつn個のグループにわける状況を考える。例えば、$k=2,n=3$とすると、３人の研修医と３つの病院とのマッチングや、６人を２人ずつ３つのグループにわける状況を考えることになる。

定義１：マッチング

マッチングMは、以下の条件を満たすプレーヤーの集合上の分割である。

(M1):Mに含まれるすべての要素mについて、

$$\forall m \in M, |m| = k$$

(M2):Mに含まれるすべての要素mについて、m には各属性をもつプレーヤーが１人ずつ含まれている

条件M1は、すべてのプレーヤーが過不足なくマッチングされることを保証するものである[4]。また条件M2は、異なる属性をもつプレーヤーがマッチングされることを保証するものであり、研修医と病院の例では、研修医同士や病院同士がマッチングされる可能性を排除することになる。

定義２：グルーピング

グルーピングGは、以下の条件を満たすプレーヤーの集合上の分割である。

(G):Gに含まれるすべての要素gについて、

$$|g| = k$$

条件Gは定義1の条件M1と同じである。グルーピングは、条件M2のような属性についての条件を満たす必要がない。このことから、マッチングMの集合はグルーピングGの集合に含まれることが確認できる。任意のマッチングは、グルーピングのひとつであるといえる。

各プレーヤーiは、自分以外のk-1人からなるプレーヤーの集合$\{J \subset 1 : |J| = k-1, i \notin J\}$ に対して好みをもつものする（その好みを$\succ$であらわす）。その好みに基づいてマッチングやグルーピングをブロックするプレーヤーの集合を定義し、ブロックされることがないという意味でそれぞれの安定性を定義する。

定義３：マッチングのブロック

次の条件が成り立つとき、k人のプレーヤーからなる集合BがマッチングMをブロックするという。

(BM1):$\forall i \in B, i \in \forall m \in M, B \setminus \{i\} \succ_i m \setminus \{i\}$

(BM2): Bには各属性をもつプレーヤーが１人ずつ含まれている

条件BM1は、集合Bに含まれるすべてのプレーヤーにとって、マッチングMで組み合わされるプレーヤー（達）よりもBに含まれるプレーヤー（達）の方が好ましいということを表している。BのメンバーがマッチングMから逸脱する誘因をもつことになる。

条件BM2は、同じ属性をもつプレーヤーとは逸脱することが許されないことをあらわしている。

定義４：グルーピングのブロック

次の条件が成り立つとき、k人のプレーヤーからなる集合BがグルーピングGをブロックするという。

(BG):$\forall i \in B, i \in \forall g \in G, B \setminus \{i\} \succ_i g \setminus \{i\}$

条件BGは、定義３の条件BM1と同じである。グルーピング問題では属性を考慮する必要がないため、ここでは定義３の条件BM2に対応するものを条件にする必要はない。

定義３や定義４の意味でブロックされない、あるいは逸脱されないという条件をもって安定性を定義する。

定義５：安定マッチング

ブロックされることのないマッチングMを安定マッチングという。

定義６：安定グルーピング

ブロックされることのないグルーピングGを安

[4]先行研究には過不足を許すマッチングを考慮しているものもある。

定グルーピングという。

次項では、安定マッチングや安定グルーピングなどを例示することにする。

2.2例示

$k=2,n=2$であるとする。

4人のプレーヤーの集合を$\{1,2,3,4\}$とし、プレーヤー1とプレーヤー2が属性１をもち、プレーヤー3とプレーヤー4が属性2をもつものとする。また、プレーヤー達は、以下のような好みをもつとする。すべてのプレーヤーが番号の若いプレーヤーを好ましく思っている状況を示している。

・プレーヤー1：$\{2\} \succ_1 \{3\} \succ_1 \{4\}$
・プレーヤー2：$\{1\} \succ_2 \{3\} \succ_2 \{4\}$
・プレーヤー3：$\{1\} \succ_3 \{2\} \succ_3 \{4\}$
・プレーヤー4：$\{1\} \succ_4 \{2\} \succ_4 \{3\}$

このとき、マッチングは以下の2種類である。

M1：$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
M2：$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$

グルーピングは以下の3種類となる。

G1：$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
G2：$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$
G3：$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

Ｍ１は安定マッチングである。

前節定義３の条件BM2を満たす集合として$\{1,4\}$と$\{2,3\}$が挙げられる。

$\{1,4\}$について考えると、プレーヤー1にとってはM1によりマッチングされているプレーヤー3の方がプレーヤー4より好ましいため、M1から逸脱する誘因をもたず、条件BM1は満たされない。したがって$\{1,4\}$がM1をブロックすることはない。

$\{2,3\}$については、プレーヤー2にとってはM1によりマッチングされているプレーヤー4よりもプレーヤー3が好ましくM1から逸脱する誘因をもつが、プレーヤー3にとってはM1によりマッチングされているプレーヤー1の方がプレーヤー2より好ましいため逸脱する誘因をもたない。したがって$\{2,3\}$がM1をブロックすることはない。

Ｍ２は安定マッチングではない。

前節定義3の条件BM2を満たす集合として$\{1,3\}$と$\{2,4\}$が挙げられる。

$\{1,3\}$に注目すると、プレーヤー1にとってはM2によりマッチングされているプレーヤー4よりプレーヤー3の方が好ましいため、M2から逸脱する誘因をもつことがわかる。また、プレーヤー3にとってはM2によりマッチングされているプレーヤー2よりプレーヤー1の方が好ましいため、同じくM2から逸脱する誘因をもつ。したがって$\{1,3\}$はM2をブロックすることになり、M2は安定マッチングでないことが示された。

G1とG2は安定グルーピングではない。

どちらのグルーピングについても、$\{1,2\}$を考えると、プレーヤー1にとってはG1とG2で同じグループになっているプレーヤー3とプレーヤー4よりプレーヤー2の方が好ましく、プレーヤー2にとってはG1とG2で同じグループになっているプレーヤー4とプレーヤー3よりプレーヤー1の方が好ましい。したがって、$\{1,2\}$はG1とG2をブロックすることとなり、G1とG2は安定グルーピングではないと確認される。

G3は安定グルーピングである。

このグルーピングにおいて、プレーヤー3とプレーヤー4はお互い最も好ましくない相手と同じグループに入っていることになるため、プレーヤー1やプレーヤー2を相手として逸脱する誘因をもつ。しかしながら、その相手側のプレーヤー1とプレーヤー2はお互いに最も好ましい相手となっておりこのグループから逸脱する誘因をもたない。したがって、G3がブロックされることはなくG3が安定グルーピングであることが確認される。

3 結果

本項では、マッチング問題の研究で得られている成果を紹介し、それと対比させる形でグルーピング問題について得られた結果を示す。

定理1 (Gale-Shapley; 1962)
k=2であれば、安定マッチングが存在する。

安定マッチングについては、前節においてプレーヤー達の好みを特定した上で例示したが、この定理は、プレーヤー達がどのような好みをもっていても安定マッチングが存在することを主張するものである。

その安定マッチングを実現する方法が存在するかという疑問が生じるが、Gale-Shapley (1962)はその疑問も解消し、Deferred Acceptance Algorithm（DAアルゴリズム）と呼ばれる手順を用いれば安定マッチングを実現できることを証明している[5]。

では、グルーピング問題において、一般に、あるいはk=2のときに安定グルーピングは存在するかというと答えは否である。

定理2
一般に（k=2のとき）、安定グルーピングが存在するとは限らない。

証明
この定理は次の反例によって証明される。

例
前節同様、k=2,n=2であるとする。4人のプレーヤーの集合を $\{1,2,3,4\}$ とし、プレーヤー達は、以下のような好みをもつとする[6]。

・プレーヤー1：$\{4\} \succ_1 \{3\} \succ_1 \{2\}$
・プレーヤー2：$\{1\} \succ_2 \{4\} \succ_2 \{3\}$
・プレーヤー3：$\{1\} \succ_3 \{4\} \succ_3 \{2\}$
・プレーヤー4：$\{3\} \succ_4 \{1\} \succ_4 \{2\}$

前節で確認したように、グルーピングは以下の3種類となる。

G1：$\{\{1,3\},\{2,4\}\}$
G2：$\{\{1,4\},\{2,3\}\}$
G3：$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

以下ではこれらのいずれもが安定グルーピングにならないことを示す。

G1は $\{1,4\}$ にブロックされる。プレーヤー1にとってはG1により同じグループになっているプレーヤー3よりもプレーヤー4の方が好ましく、プレーヤー4にとってはG1により同じグループになっているプレーヤー2よりもプレーヤー1の方が好ましいからである。したがってG1は安定グルーピングとはいえない。

G2は $\{3,4\}$ にブロックされる。プレーヤー3にとってはG2により同じグループになっているプレーヤー2よりもプレーヤー4の方が好ましく、プレーヤー4にとってはG2により同じグループになっているプレーヤー1よりもプレーヤー3の方が好ましいからである。したがってG3は安定グルーピングとはいえない。

G3は $\{1,3\}$ にブロックされる。プレーヤー1にとってはG3により同じグループになっているプレーヤー2よりもプレーヤー3の方が好ましく、プレーヤー3にとってはG3により同じグループになっているプレーヤー4よりもプレーヤー1の方が好ましいからである。したがってG3は安定グルーピングとはいえない。

以上のことから、プレーヤーの好みによっては安定グルーピングが存在しない可能性があることが示され、定理2が証明される。

<証明終>

マッチング問題と異なり、グルーピング問題ではk=2であっても安定グルーピングが存在するとは限らないことが示されたわけであるが、次の疑問として、どのようなときに安定的なマッチング

[5]本稿では対比されるべきグルーピングの手順について扱わないため、ここではDAアルゴリズムの詳細を省略する。
[6]ここではグルーピング問題を扱っているため、属性については考慮する必要がないことを注意されたい。

が存在するのかというものがある。

現段階では明確な存在条件を示すことはできないが、次節でマッチング問題の研究発展を参考に今後のグルーピング問題の可能性を議論する。

4 議論

本節では、安定グルーピングの存在条件を検討するうえで、参考になると思われるマッチング問題の研究文脈を紹介し、今後の研究課題と可能性を示す。

k=2のときに必ず安定マッチングが存在することは前節で紹介した通りである。ではK=3以上のときはどうであろう。k=3のケースではAlkan (1988)が例を用いて、安定マッチングが必ずしも存在するとは限らないことを示している。k=2のグルーピング問題と同様の結果といえる。

では前提条件を加えることで、安定マッチングの存在を保証することはできないのであろうかという疑問が生じる。この点については、Ng and Hirschberg (1991) や Eriksson, Sjöstrand, and Strimling (2006)らが肯定的な結果を導いている。

プレーヤー達の好みが循環的であるときは、$k \leq 4$であれば安定マッチングが存在することが示されているのである[7]。好みが循環的であるとは、例えば属性1のプレーヤーは属性2のプレーヤーに対してのみ好みをもち、属性2のプレーヤーは属性3のプレーヤーにのみ好みをもち、・・・、属性kのプレーヤーは属性1のプレーヤーのみに好みをもつ、というような様子を意味する。

これらの研究を参考に、プレーヤー達のもちうる好みに制限を設けることで安定グルーピングの存在が保証されるかを分析するというのがひとつの方向性として考えられる。

他には、ブロックの定義を変更することで安定性の定義を変更し、安定グルーピングが存在しやすくする方向性も考えられる。条件を追加してブロックの概念により制約を課せば、ブロックされないという意味での安定性の条件が緩和されることにつながり、安定グルーピングが存在する可能性が高まるであろう。本研究は緒に就いたばかりであるため、マッチング問題のように類似する研究文脈を参考に、試行錯誤を続けていきたい。

5 参考文献

Alkan, A. (1988) "Nonexistence of stable threesome matchings," *Mathematical Social Science,* 16(2), 207-209.

Eriksson, K., J. Sjöstrand, and P. Strimling (2006) "Three-dimensional stable matching with cyclic preferences," *Mathematical Social Science,* 52(1), 77-87.

Gale, D.,and L. Shapley (1962) "College admissions and the stability of marriage," *American Mathematical Monthy,* 69, 9-15.

Ng, C., and D. Hirschberg (1991) "Three-dimensional stable matching problems," *SIAM J. Discrete Math.* 4 (2), 245-252.

Ray, D (2007) *A Game-Theoretic Perspective on Coalition Formation,* Oxford University Press.

Roth, A.,and M. Sotomayor (1990) *Two-sided matching,* Cambridge University Press.

Roth, A (2015) Who Gets What, Eamon Dolan.

[7] Ng and Hirschberg (1991)が$k \leq 3$のケースを証明し、Eriksson, Sjöstrand, and Strimling (2006)が$k \leq 4$のケースを証明している。