平均収穫ゲームにおける長期的視野に立った個人安定性

升　田　　　猛

目次

1．はじめに

一種類の投入物と一種類の生産物が存在する生産経済を考える。生産技術は共同所有されている。各経済主体の投入量の総和により総生産量が決まるが、各個人の投入量に比例して、総生産量が分配される。Moulin and Watts（1997）に従い、このような状況を平均収穫ゲーム（*average return game*）と呼ぶ。Watts（1996）が指摘するように、共有地の悲劇（*tragedy of commons*）やクールノー寡占（*Cournot oligopoly*）などが例として挙げられる。

Chwe（1994）は、Greenberg（1990）における提携による条件付きの脅し状況（*coalitional contingent threats situation*）に長期的視野に立った提携安定性（*farsighted coalitional stability*）の概念を適用し、遠視眼的な安定集合（*farsighted stable set*）と最大整合集合（*largest consistent set*）の性質について分析をおこなった。最大整合集合は一意に存在し、遠視眼的な安定集合が存在するならば、それは最大整合集合に含まれる。遠視眼的な安定集合は存在しなかったり、複数存在したりする可能性がある。他方、最大整合集合は、一意に存在するが、空集合になったり、非常に多くの要素から成る巨大な集合になったりする可能性がある。

Masuda（2002）は、平均収穫ゲームにおいて、Greenberg（1990）における個人による条件付きの脅し状況（*individual contingent threats situation*）を考え、Chwe（1994）が導入した遠視眼的な安定集合と最大整合集合を特徴づけた。遠視眼的な安定集合は複数存在するが、すべて本質的に単集合であり、その和集合はパレート最適な戦略プロファイルの集合に一致する。また、最大整合集合は個人合理的な戦略プロファイルの集合に等しく、非常に大きな集合になる。

Masuda（2002）において、共同所有される生産関数は、狭義に増加し、狭義に凹である。また、投入物と生産物の組に関する各個人の選好は、同一であり、投入量に関して狭義に減少し、生産量に関して狭義に増加し、凸、局所非飽和、連続である。この論文では、各個人の選好に関する仮定を緩め、各個人の選好は、同一であるとは限らず、投入量に関して非増加、生産量に関して非減少、凸、局所非飽和、連続であるとしても、遠視眼的な安定集合と最大整合集合に関して、Masuda (2002) と同様の結果が得られることを示す。

これ以降の論文の構成は以下の通りである。２章で、平均収穫ゲームを定義し、生産外部性が存在することを示す。３章で、遠視眼的な安定集合と最大整合集合を定義し、これらの長期的視野に立った個人安定性に関する概念に密接な関係があることを指摘する。４章で、平均収穫ゲームにおいて、パレート最適性、遠視眼的な安定集合、個人合理性、最大整合集合の関係を特徴づける。５章で、結論と今後の研究課題について述べる。

2．平均収穫ゲーム

この章では、生産技術が共同所有されている生産経済を平均収穫ゲームとして定式化し、平均収穫ゲームにおいて、生産外部性が存在することを明らかにする。

一種類の投入物と一種類の生産物が存在する生産経済を考える。n人の経済主体の有限集合を$N=\{1, \cdots, n\}$とおく。ただし、$n\geq 2$である。各経済主体$i\in N$は非負の投入量$x_i\in\Re_+$を選択する。ここで、$\Re_+$は非負の実数の集合である。総投入量$\sum_{i\in N}x_i$をx_Nと表す。総投入量$x_N\in\Re_+$を総生産量$f(x_N)\in\Re_+$に変換する生産技術$f:\Re_+\to\Re_+$は共同所有され、総生産量$f(x_N)$は各個人の投入量x_iに比例して分配される。各個人の投入量がx_iのとき、各個人の生産量は$y_i=(x_i/x_N)f(x_N)$である。生産関数fは、$[0, \infty)$で連続、$(0, \infty)$で二階微分可能、任意の$x_N\in(0, \infty)$に対して、$f'(x_N)>0$かつ$f''(x_N)<0$である。また、$f(0)=0$である。投入量と生産量の組$(x_i, y_i)\in\Re^2_+$に関する各個人の選好は、投入量x_iに関して非増加、生産量y_iに関して非減少、凸、局所非飽和、連続である。各個人の選好は効用関数$u_i:\Re^2_+\to\Re$により表現される[1)]。ここで、$\Re$は実数の集合である。各個人の効用関数は$u_i(0, 0)=0$となるように単調変換されている。

上記の生産経済は戦略形ゲーム$\Gamma=\{N, (X_i)_{i\in N}, (g_i)_{i\in N}\}$として定義される。ここで、プレイヤー集合は$N=\{1, \cdots, n\}$、各プレイヤーの戦略集合は$X_i=\{x_i \mid x_i\in\Re_+\}$、各プレイヤーの利得関数$g_i$は、戦略プロファイルの集合$X=\times_{i\in N}X_i$上で定義された実数値関数$g_i:X\to\Re$である。任意の$i\in N$と任意の$(x_1, \cdots, x_n)\in X$に対して、

1）各個人の選好が効用関数によって表現されなくても、この論文におけるすべての結果は成立する。記述を簡単にするためだけに効用関数を導入する。

$$g_i(x_1,\cdots,x_n)=\begin{cases}0 & (x_N=0\text{のとき})\\ u_i(x_i,(x_i/x_N)f(x_N)) & (x_N\neq 0\text{のとき})\end{cases}$$

である。Moulin and Watts（1997）に従い、戦略形ゲームΓを平均収穫ゲームと呼ぶ。

平均収穫ゲームΓにおいて、生産外部性が存在する。各個人$i\in N$が単独で投入量x_iを減少させれば、iと異なる任意のプレイヤー$j\in N$の生産量y_jは減少しない。生産関数fに関する仮定から、$x_N>0$ならば、$f'(x_N)<f(x_N)/x_N$が成り立つ。任意の異なるプレイヤー$i, j\in N$に対して、$x_j>0$ならば、

$$\frac{\partial y_j(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{x_j}{x_N}\left\{f'(x_N)-\frac{f(x_N)}{x_N}\right\}<0$$

である。$x_j>0$ならば、生産量y_jは増加する。また、$x_j=0$ならば、生産量$y_j=(x_j/x_N)f(x_N)$は変化しない。さらに、各個人$j\in N$が投入量x_jを変更しなくても、jを除くすべてのプレイヤー$i\in N$の投入量の総和$\sum_{i\neq j}x_i$が減少すれば、生産量y_jは減少しない。$\sum_{i\neq j}x_i=x_{-j}$と表記し、これらの結果を次の補題１にまとめる。

補題１　任意の$x\in X$、任意の$a\in X$、任意の$i\in N$に対して、$x_i>a_i$かつ任意の$j\neq i$に対して$x_j=a_j$ならば、任意の$j\neq i$に対して$y_j\leq b_j$である。ただし、$y_j=b_j$となるのは、$x_j=0$のときかつそのときに限る。さらに、任意の$x\in X$、任意の$a\in X$、任意の$j\in N$に対して、$x_j=a_j$かつ$x_{-j}>a_{-j}$ならば、$y_j\leq b_j$である。ただし、$y_j=b_j$となるのは、$x_j=0$のときかつそのときに限る。

平均収穫ゲームΓにおいて、各個人$i\in N$が単独で投入量x_iを減少させれば、比例分配される生産量y_iは減少する。任意のプレイヤー$i\in N$に対して、$x_i>0$ならば、

$$\frac{\partial y_i(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_i}=\frac{x_i}{x_N}f'(x_N)+\left(1-\frac{x_i}{x_N}\right)\frac{f(x_N)}{x_N}>0$$

である。次の補題２が成り立つ。

補題２　任意の$x\in X$、任意の$c\in X$、任意の$i\in N$に対して、$x_i>c_i$かつ任意の$j\neq i$に対して$x_j=c_j$ならば、$y_i>d_i$である。

３．遠視眼的な安定集合と最大整合集合

この章では、２章で定義した平均収穫ゲームΓにおいて、Greenberg（1990）に従い、個人による条件付きの脅し状況を考え、Chwe（1994）が導入した遠視眼的な安定集合と最大整合集合を定義する。また、これらの長期的視野に立った個人安定性の概念に密接な関係があることを指摘する。

プレイヤー$i\in N$が戦略プロファイル$x\in X$に対して戦略プロファイル$z\in X$と異議を唱えるとは、

iと異なる任意のプレイヤー$j \in N$に対して、$x_j = z_j$であるときをいう。このような異議を$x \to_i z$と表記する。各個人は、他のすべての個人が戦略を変更しないという条件を付けて、脅しをかけることができる。戦略プロファイルzが戦略プロファイルxを間接支配するとは、戦略プロファイルの点列$\{x^0, x^1, x^2, \cdots, x^M\}$とプレイヤーの点列$\{i^1, i^2, \cdots, i^M\}$が存在して、$x^0 = x$かつ$x^M = z$、任意の$m = 1, \cdots, M$に対して、$x^{m-1} \to_{i^m} x^m$かつ$u_{i^m}(x^{m-1}) < u_{i^m}(x^M)$であるときをいう。このような間接支配を$z$ indom xと表す。異議を唱える各々のプレイヤー$i^m \in N$は、終点zにおいて、利得が改善されるが、中間点において、利得が改善されない可能性がある。

定義1　戦略プロファイルの部分集合$K \subset X$が遠視眼的な安定集合であるのは、内部安定性と外部安定性を満たすときである。内部安定性：任意の$x \in K$と任意の$z \in K$に対して, x indom zでもz indom xでもない。外部安定性：任意の$z \in X \backslash K$に対して、$x \in K$が存在して、x indom zである。

定義2　戦略プロファイルの部分集合$O \subset X$が整合集合であるとは、内部整合性と外部整合性を満たすときである。内部整合性：任意の$x \in O$、任意の$z \in X$、任意の$i \in N$に対して、$x \to_i z$ならば、$w \in O$が存在して、$w = z$あるいはw indom z、かつ、$u_i(w) \leq u_i(x)$である。外部整合性：任意の$x \in X \backslash O$に対して、$z \in X$と$i \in N$が存在して、$x \to_i z$かつ任意の$w \in O$に対して、$w = z$あるいはw indom z、ならば、$u_i(w) > u_i(x)$である。戦略プロファイルの部分集合$L \subset X$が最大整合集合であるとは、Lが整合集合かつすべての整合集合を含むときをいう。

内部整合性の定義における「$w \in O$が存在して」と「かつ」をそれぞれ「任意の$w \in O$に対して」と「ならば」に置換すれば、内部安定性の定義になる。また、外部整合性の定義における「任意の$w \in O$に対して」と「ならば」をそれぞれ「$w \in O$が存在して」と「かつ」に置換すれば、外部安定性の定義になる。異議を唱える個人のその後の見通しは、整合集合において、悲観的であり、遠視眼的な安定集合において、楽観的である。

4．平均収穫ゲームの長期的視野に立った個人安定的な帰結

2章で定義した平均収穫ゲームΓにおいて、長期的視野に立った個人安定的な帰結の性質について考察する。すなわち、パレート最適性、遠視眼的な安定集合、個人合理性、最大整合集合の関係を特徴づける。Chwe（1994）は、最大整合集合は一意に存在し、遠視眼的な安定集合が存在するならば、それは最大整合集合に含まれることを示した。この章では、平均収穫ゲームにおいて、遠視眼的な安定集合は複数存在するが、すべて本質的に単集合であり、遠視眼的な安定集合の和集合がパレート最適な戦略プロファイルの集合に一致し、最大整合集合は個人合理的な戦略プロファイ

ルの集合に等しいことを証明する。

戦略プロファイル$z \in X$が戦略プロファイル$x \in X$をパレート改善するとは、任意のプレイヤー$i \in N$に対して$u_i(z) \geq u_i(x)$かつプレイヤー$i \in N$が存在して$u_i(z) > u_i(x)$であるときをいう。$x \in X$がパレート最適な戦略プロファイルであるとは、任意の$z \in X$に対して、zがxをパレート改善しないときである。パレート最適な戦略プロファイルの集合をPと表記する。パレート最適な戦略プロファイル$x \in P$に対して、同値類$S(x) = \{z \in P \mid u_i(x) = u_i(z)\ \forall i \in N\}$を定義し、同値類の集合$Q=\{S(x) \mid x \in P\}$を定義する。このとき、任意の異なる$S \in Q$と$T \in Q$に対して、$S \cap T = \emptyset$である。また、$\cup_{S \in Q} S = P$である。

定理 1　戦略プロファイルの部分集合$K \subset X$が遠視眼的な安定集合であるのは、$K \in Q$であるときかつそのときに限る。

$x \in X$が個人合理的な戦略プロファイルであるとは、任意のプレイヤー$i \in N$に対して、$u_i(x) \geq \sup_{z_i \in X_i} \inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(z)$であるときをいう。ここで、$X_{-i} = \times_{j \neq i} X_j$である。個人合理的な戦略プロファイルの集合を$I$と表す。

任意の$i \in N$に対して、効用水準が0である無差別曲線をU_i^0と表記する。点(a_i, b_i)を無差別曲線U_i^0上の$(0, 0)$でない点とし、$\alpha_i = \lim_{a_i \to 0+} \{b_i / a_i\}$と定義する。無差別曲線$U_i^0$が生産量$y_i$に依存しない場合、$\alpha_i = \infty$とする。また、$\lim_{x_N \to \infty} \{f(x_N) / x_N\} = \beta$とおく。ロピタルの定理より、$\beta = \lim_{x_N \to \infty} f'(x_N)$である。$\gamma$を次のように定義する。$f'(0)$が存在するならば、$\gamma = f'(0)$、$f'(0)$が存在しないならば、$\gamma = \infty$とする。このとき、$0 \leq \beta < \gamma$である。

この論文では、任意の$i \in N$に対して、$\beta < \alpha_i$である場合のみを考察する。このとき、任意の$i \in N$に対して、$\sup_{z_i \in X_i} \inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(z) = 0$である[2)]。ゆえに、$x \in I$ならば、かつそのときに限り、任意の$i \in N$に対して$u_i(x) \geq 0$である。

定理 2　最大整合集合Lは個人合理的な戦略プロファイルの集合Iに等しい。

これから、定理 1 と定理 2 を証明するために必要な 6 つの補題を順次導入し、証明の方針を述べていく。次の補題 3 において、最大整合集合Lが個人合理的な戦略プロファイルの集合Iに含まれることを示す。Chwe（1994, p. 309）の命題 3 より、遠視眼的な安定集合Kは最大整合集合Lに含まれるから、遠視眼的な安定集合Kが個人合理的な戦略プロファイルの集合Iに含まれることがわ

2）任意の$i \in N$に対して、$\beta < \alpha_i$ならば、$\sup_{z_i \in X_i} \inf_{z_{-i} \in X_{-i}} u_i(z) = \inf_{z_{-i} \in X_{-i}} \sup_{z_i \in X_i} u_i(z) = 0$が成り立つ。

かる。

補題3　$L \subset I$である。

証明　$x \in X$が存在して、$x \in L$かつ$x \in X \backslash I$と仮定する。$x \notin I$より、$j \in N$が存在して、$u_j(x)<0$である。このとき、$x_j>0$である。$z \in X$が存在して、$z_j=0$かつ$x \rightarrow_j z$である。このとき、$u_j(z)=0>u_j(x)$である。任意の$w \in X$に対して、w indom zならば、$u_j(w) \geq 0$であることを示す。任意の$m=1, \cdots, M$に対して、$i^m \neq j$ならば、$w_j=z_j=0$であるから、$u_j(w)=0$である。$m=1, \cdots, M$が存在して、$i^m=j$ならば、$\hat{m}=\arg\min\{m \mid i^m=j\}$とすると、$u_j(w)>u_j(z^{\hat{m}-1})=0$である。任意の$w \in X$に対して、$w$ indom zならば、$u_j(w) \geq 0>u_j(x)$である。Lの内部整合性に矛盾する。(証明終)

補題3を用いて、任意の$i \in N$に対して、$\alpha_i \geq \gamma$ならば、$K=L=P=I=\{0\}$が成り立つことを示す。任意の$x \in X$と任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \leq 0$である。ただし、$u_i(x)=0$となるのは、$x_i=0$であるときかつそのときに限る。ゆえに、$P=I=\{0\}$である。補題3より、$L \subset I$である。$K \subset L$であるから、$K \subset L \subset P=I=\{0\}$である。任意の$z \in X$に対して、$z \neq 0$ならば、0 indom zであるから、$\{0\}$は外部安定性を満たす。$\{0\}$は単集合であるから、内部安定性を満たす。$\{0\} \subset K$である。

これ以降、$i \in N$が存在して、$\alpha_i<\gamma$である場合を考察する。

補題4　任意の$i \in N$に対して、$\beta<\alpha_i<\gamma$ならば、$\tilde{x}_i \in X_i$と$\bar{x}_i \in X_i$が一意に存在して、$u_i(\tilde{x}_i, f(\tilde{x}_i))=0$かつ$f(\bar{x}_i)/\bar{x}_i=\alpha_i$かつ$0<\tilde{x}_i \leq \bar{x}_i$である。

$i \in N$が一意に存在して、$\alpha_i<\gamma$である場合を考える。このとき、$K=L=P \subset I$かつ$L \neq I$が成り立つことを示す。生産関数と選好に関する仮定より、最大化問題$\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, f(x_i))$の解$x_i^* \in X_i$が一意に存在する[3]。そこで、$H=\{x \in X \mid x_i=x_i^*, x_j=0 \forall j \neq i\}$とする。$P=H$であることを示す。任意の$z \in X$に対して、$j \neq i$が存在して$z_j>0$ならば、$z$はパレート改善されることを示す。$\alpha_j \geq \gamma$より、

3）生産関数は狭義に凹であるから、選好に関する仮定より、制約条件$y_i=f(x_i)$における効用$u_i(x_i, y_i)$最大化問題の解$(x_i^*, y_i^*) \in \Re_+^2$は一意である。制約条件$y_i=f(x_i)$かつ$0 \leq x_i \leq \tilde{x}_i$の下で効用$u_i(x_i, y_i)$最大化問題を考える。効用関数$u_i(x_i, y_i)$は、$\Re_+^2$の有界閉集合上に定義された連続関数であるから、最大値の定理より、効用最大化問題の解は存在する。$0 \leq x_i \leq \tilde{x}_i$ならば、$u_i(x_i, y_i) \geq 0$である。ただし、$u_i(x_i, y_i)=0$となるのは、$x_i=0$あるいは$x_i=\tilde{x}_i$のときかつそのときに限る。$\tilde{x}_i<x_i$ならば、$u_i(x_i, y_i)<0$である。ゆえに、任意の$i \in N$に対して、$\beta<\alpha_i<\gamma$ならば、制約条件$y_i=f(x_i)$における効用最大化問題の解$(x_i^*, y_i^*)$は、内点解として一意に存在し、$u_i(x_i^*, y_i^*)>0$である。

$u_j(z)<0$である。$w\in X$が存在して、$j\in N$が一意に存在して、$w_j=0$であり、任意の$k\neq j$に対して、$w_k=z_k$である。$u_j(w)=0>u_j(z)$である。補題1より、任意の$k\neq j$に対して、$u_k(w)\geq u_k(z)$である。任意の$z\in X$に対して、$z_i\neq x_i^*$かつ任意の$j\neq i$に対して$z_j=0$ならば、x_i^*は一意に存在するから、zはパレート改善される。ゆえに、$P\subset H$が成り立つ。また、$x\in H$ならば、任意の$z\in X$と任意の$i\in N$に対して、$u_i(z)\leq u_i(x)$である。xはパレート改善されないから、$H\subset P$である。任意の$i\in N$に対して$\beta<\alpha_i$かつ$i\in N$が一意に存在して$\alpha_i<\gamma$ならば、以下で示されるように定理1は成立するから、$K=P=H$が成り立つ。

$K=L$であることを示す。$K\subset L$であるから、$L\subset K$を示せばよい。$x\in X$が存在して、$x\in L$かつ$x\in X\backslash K$と仮定する。補題3より、$L\subset I$である。$I=\{x\in X\,|\,0\leq x_i\leq \tilde{x}_i,\ x_j=0\,\forall j\neq i\}$であるから、$x\in L$より、任意の$j\neq i$に対して$x_j=0$である。$x\notin K$より、$x_i\neq x_i^*$である。$z\in X$が存在して、$z_i=x_i^*$かつ$x\rightarrow_i z$である。$x_i^*$は一意に存在するから、$u_i(z)>u_i(x)$である。任意の$w\in X$と任意の$i\in N$に対して、$u_i(w)\leq u_i(z)$であるから、任意の$w\in X$に対して、$w$ indom zでない。Lの内部整合性に矛盾する。以上から、$K=L=P=H\subset I$かつ$L\neq I$が成り立つ。

この論文では、任意の$i\in N$に対して$\beta<\alpha_i$かつ$i\in N$が存在して$\alpha_i<\gamma$という仮定の下で、定理1を証明する。先に示したように、任意の$i\in N$に対して$\beta<\alpha_i$かつ$i\in N$が一意に存在して$\alpha_i<\gamma$という場合、$L=P$かつ$L\neq I$となり、定理2は成立しない。そこで、任意の$i\in N$に対して$\beta<\alpha_i$かつ$i\in N$が複数存在して$\alpha_i<\gamma$と仮定して、定理2を証明する。

$l\in\arg\min_{i\in N}\{\alpha_i\}$と表記すると、$i\in N$が存在して$\alpha_i<\gamma$であるから、$\beta<\alpha_l<\gamma$が成り立つ。任意の$x\in X$に対して、$i\in N$が存在して$x_i=\bar{x}_l$ならば、任意の$i\in N$に対して$u_i(x)\leq 0$である。各個人$i\in N$は、$\bar{x}_l$と異議を唱えることにより、すべての個人の利得を0以下にすると脅しをかけることができる。

次の補題5と6において、パレート最適な戦略プロファイルの集合Pを特徴づける。補題5より、パレート最適な戦略プロファイルの集合Pは、個人合理的な戦略プロファイルの集合Iに含まれることがわかる。

補題5　$x\in P$ならば、任意の$i\in N$に対して$u_i(x)\geq 0$かつ$i\in N$が存在して$u_i(x)>0$である。ただし、$u_i(x)=0$となるのは、$x_i=0$のときかつそのときに限る。

証明　任意の$i\in N$に対して、$u_i(x)\leq 0$ならば、$x\notin P$であることを示す。$z\in X$が存在して、$i\in N$が一意に存在して、$\alpha_i<\gamma$かつ$z_i=x_i^*=\arg\max_{x_i\in X_i}u_i(x_i,f(x_i))$であり、任意の$j\neq i$に対して、$z_j=0$である。$u_i(z)>0\geq u_i(x)$である。任意の$j\neq i$に対して、$u_j(z)=0\geq u_j(x)$である。$z$は$x$をパレート改善するから、$x\notin P$である。

任意の$i \in N$に対して、$x_i > 0$ならば、$u_i(x) > 0$であることを示す。$i \in N$が存在して、$x_i > 0$かつ$u_i(x) \leq 0$と仮定する。$a \in X$が存在して、任意の$i \in N$に対して、$x_i > 0$かつ$u_i(x) \leq 0$ならば$a_i = 0$であり、$x_i = 0$あるいは$u_i(x) > 0$ならば$a_i = x_i$である。補題1より、$x_i = 0$あるいは$u_i(x) > 0$ならば、$y_i \leq b_i$である。効用関数$u_i(x_i, y_i)$は生産量y_iに関して非減少であるから、$x_i = 0$あるいは$u_i(x) > 0$ならば、$u_i(x) \leq u_i(a)$である。$x_i > 0$かつ$u_i(x) \leq 0$ならば、$u_i(x) \leq 0 = u_i(a)$である。任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \leq u_i(a)$が成り立つ。

$j \in N$が存在して、$x_j > 0$かつ$u_j(x) > 0$であることを示す。任意の$j \in N$に対して、$x_j > 0$ならば$u_j(x) \leq 0$と仮定する。任意の$j \in N$に対して、$x_j = 0$ならば$u_j(x) = 0$であるから、任意の$j \in N$に対して、$u_j(x) \leq 0$である。最初の議論より、$x \notin P$であるから、$x \in P$に矛盾する。

$c \in X$が存在して、$j \in N$が一意に存在して、$c_j < a_j$であり、任意の$i \neq j$に対して、$c_i = a_i$である。補題2より、$d_j < b_j$である。$x_j > 0$であるから、補題1より、$y_j < b_j$である。c_jを十分a_jに近づければ、$y_j < d_j$である。$c_j < a_j = x_j$であるから、選好に関する仮定より、$u_j(x) < u_j(c)$が成り立つ。任意の$i \neq j$に対して、補題1より、$b_i \leq d_i$である。効用関数は生産量に関して非減少であるから、任意の$i \neq j$に対して、$u_i(x) \leq u_i(a) \leq u_i(c)$である。$x \in P$に矛盾する。(証明終)

補題6　任意の$S \in Q$に対して、$x \in S$かつ$z \in X \backslash S$ならば、$i \in N$が存在して、$u_i(\mathrm{z}) < u_i(x)$である。

証明　$S \in Q$が存在して、$x \in S$かつ$z \in X \backslash S$かつ任意の$i \in N$に対して$u_i(\mathrm{z}) \geq u_i(x)$と仮定する。$i \in N$が存在して$u_i(\mathrm{z}) > u_i(x)$と仮定すると、$x \in P$に矛盾するから、任意の$i \in N$に対して、$u_i(\mathrm{z}) = u_i(x)$である。$x \in S$より、$z \in S$である。$z \in X \backslash S$に矛盾する。(証明終)

次の補題7において、$S \in Q$が外部安定性を満たすことを示す。Qの定義より、$S \in Q$は本質的に単集合であるから内部安定性を満たす。補題7より、$S \in Q$は遠視眼的な安定集合であることがわかる。以下の定理1の証明において、補題7の証明で構築した間接支配を用いて、$S \notin Q$が遠視眼的な安定集合でないことを示す。

補題7　任意の$S \in Q$に対して、$x \in S$かつ$z \in X \backslash S$ならば、x indom zである。

証明　補題6より、$k \in N$が存在して、$u_k(\mathrm{z}) < u_k(x)$である。$k \in N$が存在して、$u_k(\mathrm{z}) < u_k(x)$かつ$z_k \neq \overline{x}_l$である場合を考える。プレイヤーの点列$\{i^1, i^2, \cdots, i^M\}$と戦略プロファイルの点列$\{z^0, z^1, \cdots, z^M\}$を以下の6つの条件を満たすようにとる。(ｉ) $i^1 = i^M = k$である。(ii) $i^1, i^2, \cdots, i^{M-1}$はすべて異なる。(iii) 任意の$m = 2, \cdots, M-1$に対して、$z_{i^m}^0 \neq z_{i^m}^M$である。(iv) $z^0 = z$かつ$z^M = x$である。(ｖ) $z_{i^1}^1 = \overline{x}_l$かつ任意の$j \neq$

i^1に対して$z_j^1=z_j^0$である。(vi) 任意の$m=2,\cdots,M$に対して、$z_{i^m}^m=z_{i^m}^M$かつ任意の$j\neq i^m$に対して$z_j^m=z_j^{m-1}$である。任意の$m=1,\cdots,M$に対して、$z^{m-1}\to_{i^m} z^m$であるから、任意の$m=1,\cdots,M$に対して、$u_{i^m}(z^{m-1})<u_{i^m}(x)$であることを示せばよい。

$m=1$の場合を考える。$u_k(\mathrm{z})<u_k(x)$より、$u_{i^1}(z^0)<u_{i^1}(x)$である

$m=2,\cdots,M-1$の場合を考える。$z_{i^m}^{m-1}>0$ならば、$u_{i^m}(z^{m-1})<0$である。補題５より、$u_{i^m}(z^{m-1})<u_{i^m}(x)$である。$z_{i^m}^{m-1}=0$ならば、$i^1,i^2,\cdots,i^{M-1}$はすべて異なるから、$z_{i^m}^{m-1}=z_{i^m}$である。よって、$z_{i^m}=0$である。$m=2,\cdots,M-1$より、$z_{i^m}\neq x_{i^m}$である。ゆえに、$x_{i^m}>0$である。補題５より、$u_{i^m}(z^{m-1})=0<u_{i^m}(x)$である。

$m=M$の場合を考える。$u_{i^M}(x)=0$かつ任意の$j\neq i^M$に対して$z_j^{M-1}=0$と仮定する。任意の$i\in N$に対して、$u_i(x)=0$である。補題５より、$x\not\in P$であるから、$x\in P$に矛盾する。$x\in P$であるから、補題５より、$u_{i^M}(x)\geq 0$である。よって、$u_{i^M}(x)>0$あるいは$j\neq i^M$が存在して$z_j^{M-1}>0$である。$u_{i^M}(x)>0$ならば、$u_{i^M}(z^{M-1})\leq 0<u_{i^M}(x)$である。$j\neq i^M$が存在して$z_j^{M-1}>0$ならば、$u_{i^M}(z^{M-1})<0$である。補題５より、$u_{i^M}(z^{M-1})<0\leq u_{i^M}(x)$である。

任意の$k\in N$に対して、$u_k(z)<u_k(x)$ならば$z_k=\overline{x}_l$である場合は、z^1から始まる点列$\{z^1,\cdots,z^M\}$を考えれば、同様にして、x indom zである。（証明終）

以下の定理１の証明において、$S\not\in Q$が遠視眼的な安定集合であると仮定し、次の補題８を用いて、内部安定性が満たされないことを示す。

補題８　任意の$x\in I\setminus P$に対して、$x\neq 0$ならば、$w\in I$が存在して、wはxをパレート改善し、任意の$i\in N$に対して、$x_i=0$ならば$w_i=0$である。

証明　$x\not\in P$より、$z\in I$が存在して、zはxをパレート改善する。任意の$i\in N$に対して、$x_i=0$ならば$z_i=0$であるとき、補題８は直ちに成立する。そこで、$i\in N$が存在して、$x_i=0$かつ$z_i>0$である場合を考える。$v\in X$が存在して、任意の$i\in N$に対して、$x_i=0$かつ$z_i>0$ならば$v_i=0$、$x_i>0$あるいは$z_i=0$ならば$v_i=z_i$である。$x_i>0$あるいは$z_i=0$ならば、補題１より、$u_i(z)\leq u_i(v)$である。任意の$i\in N$に対して、$x_i=0$ならば、$v_i=0$であるから、$u_i(x)=u_i(v)$である。また、任意の$i\in N$に対して、$x_i>0$ならば、zはxをパレート改善するから、$u_i(x)\leq u_i(z)\leq u_i(v)$である。$x\in I$より、$v\in I$が存在して、任意の$i\in N$に対して、$u_i(x)\leq u_i(v)$であり、$x_i=0$ならば$v_i=0$である。以下において、$w\in I$が存在して、$w$は$x$をパレート改善し、任意の$i\in N$に対して、$x_i=0$ならば$w_i=0$であることを示す。

$i\in N$が存在して、$x_i>0$かつ$z_i>0$である場合を考える。任意の$i\in N$に対して、$x_i>0$かつ$z_i>0$ならば、$v_i=z_i>0$である。$w\in X$が存在して、$i\in N$が一意に存在して、$x_i>0$かつ$z_i>0$かつ$w_i<v_i$であり、任意の$j\neq i$に対して、$w_j=v_j$である。$v_i=z_i>0$であるから、補題１より、$(z_i/z_N)f(z_N)<$

$(v_i/v_N)f(v_N)$である。w_iを十分v_iに近づければ、$w_i < z_i$かつ$(z_i/z_N)f(z_N) < (w_i/w_N)f(w_N)$である。選好に関する仮定から、$u_i(z) < u_i(w)$である。$z$は$x$をパレート改善するから、$u_i(x) < u_i(w)$である。補題1より、任意の$j \neq i$に対して、$u_j(v) \leq u_j(w)$である。ゆえに、任意の$j \neq i$に対して、$u_j(x) \leq u_j(v) \leq u_j(w)$である。任意の$j \neq i$に対して、$x_j = 0$ならば、$v_j = 0$であるから、$w_j = v_j = 0$である。

任意の$i \in N$に対して、$x_i > 0$ならば$z_i = 0$である場合を考える。任意の$i \in N$に対して、$z_i = 0$ならば$u_i(x) = 0$であることを示す。zはxをパレート改善するから、$z_i = 0$より、$u_i(x) \leq u_i(z) = 0$である。$x \in I$より、$u_i(x) \geq 0$である。$x \neq 0$より、$i \in N$が存在して、$x_i > 0$かつ$u_i(x) = 0$である。$\alpha_i \geq \gamma$と仮定すると、$x_i > 0$ならば$u_i(x) < 0$であるから、$\alpha_i < \gamma$である。$x_i^* = \arg\max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, f(x_i))$とすると、$x_i^*$は内点解として一意に存在し、$u_i(x_i^*, f(x_i^*)) > 0$である。$w \in X$が存在して、$i \in N$が一意に存在して、$w_i = x_i^*$であり、任意の$j \neq i$に対して、$w_j = 0$である。$u_i(x) = 0 < u_i(x_i^*, f(x_i^*)) = u_i(w)$である。任意の$i \in N$に対して、$x_i > 0$ならば$u_i(x) = 0$であるから、任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) = 0$である。任意の$j \neq i$に対して、$u_i(x) = 0 = u_i(w)$である。(証明終)

定理1の証明　任意の$K \in Q$は遠視眼的な安定集合である。Kは本質的に単集合であるから、Kは内部安定性を満たす。また、補題7より、Kは外部安定性を満たす。

$K \notin Q$が遠視眼的な安定集合でないことを証明する。$K \notin Q$が遠視眼的な安定集合であると仮定し、Kの内部安定性に矛盾することを示す。$K \subset L$である。補題3より、$L \subset I$である。ゆえに、$K \subset I$である。以下において、$K \cap P = \emptyset$を示してから、$K \subset I \backslash P$ならば、Kの内部安定性が満たされないことを示す。

$K \subset P$と仮定する。このとき、任意の$x \in K$、任意の$z \in K$、任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) = u_i(z)$である。$x \in K$、$z \in K$、$i \in N$が存在して、$u_i(x) \neq u_i(z)$と仮定する。$K \subset P$より、$S \in Q$が存在して、$x \in S$かつ$z \in X \backslash S$である。補題7より、x indom zであるから、Kの内部安定性に矛盾する。$K \notin Q$より、$S \in Q$が存在して、$K \subset S$かつ$K \neq S$である。$w \in S \backslash K$が存在して、任意の$x \in K$に対して、x indom wでない。Kの外部安定性に矛盾する。$K \cap P \neq \emptyset$かつ$K \cap (X \backslash \mathrm{P}) \neq \emptyset$と仮定する。$x \in K \cap P$かつ$z \in K \backslash P$とする。$S \in Q$が存在して、$x \in S$かつ$z \in X \backslash S$である。補題7より、$x$ indom zであるから、Kの内部安定性が満たされない。

$K \subset I$かつ$K \cap P = \emptyset$より、$K \subset I \backslash P$である。$x \in K$とする。Kが単集合であると仮定する。$x \notin P$より、$z \in I$が存在して、zはxをパレート改善する。Kの外部安定性が満たされないから、Kは単集合でない。$x \neq 0$とする。補題8より、$w \in I$が存在して、wはxをパレート改善し、任意の$i \in N$に対して、$x_i = 0$ならば$w_i = 0$である。

w indom xを示す。補題7と同様にして、$x^0 = x$かつ$x^M = w$である点列$\{x^0, x^1, \cdots, x^M\}$をとる。$k \in N$が存在して、$u_k(x) < u_k(w)$であるから、$i^1 = k$とする。$x \in I$より、任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \geq 0$

である。よって、$0 \leq u_k(x) < u_k(w)$である。$i^M = k$より、$0 < u_{i^M}(w)$である。$x_{i^M}^{M-1} = \bar{x}_l$より、$u_{i^M}(x^{M-1}) \leq 0 < u_{i^M}(w)$が成り立つ。任意の$m = 2, \cdots, M-1$に対して、$u_{i^m}(x^{m-1}) < u_{i^m}(w)$であることを示す。$x_i = 0$ならば$w_i = 0$であるから、$x_{i^m}^{m-1} > 0$である。$i^1 \neq i^m$かつ$x_{i^m}^{m-1} = \bar{x}_l$であるから、$u_{i^m}(x^{m-1}) < 0$である。$w \in I$より、任意の$i \in N$に対して$u_i(w) \geq 0$であるから、$u_{i^m}(x^{m-1}) < 0 \leq u_{i^m}(w)$である。

$x \in K$かつw indom xであるから、Kの内部安定性より、$w \in I \backslash K$である。Kの外部安定性より、$z \in K$が存在して、z indom wである。任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \leq u_i(w)$であるから、x indom wでない。よって、$z \neq x$である。以下において、z indom xを示し、Kの内部安定性が満たされないことを示す。

補題7と同様にして、$x^0 = x$かつ$x^M = z$である点列$\{x^0, x^1, \cdots, x^M\}$をとる。$z$ indom wより、$i^1 \in N$が存在して、$u_{i^1}(w) < u_{i^1}(z)$である。任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \leq u_i(w)$であるから、$u_{i^1}(x) < u_{i^1}(z)$である。$x \in I$であるから、任意の$i \in N$に対して、$u_i(x) \geq 0$である。よって、$0 \leq u_{i^1}(x) < u_{i^1}(z)$である。$i^1 = i^M$より、$0 < u_{i^M}(z)$である。$x_{i^M}^{M-1} = \bar{x}_l$より、$u_{i^M}(x^{M-1}) \leq 0 < u_{i^M}(z)$が成り立つ。任意の$m = 2, \cdots, M-1$に対して、$u_{i^m}(x^{m-1}) < u_{i^m}(z)$であることを示す。$z \in K$かつ$K \subset I$より、$z \in I$であるから、任意の$i \in N$に対して、$u_i(z) \geq 0$である。$x_{i^m}^{m-1} > 0$ならば、$i^1 \neq i^m$かつ$x_{i^m}^{m-1} = \bar{x}_l$であるから、$u_{i^m}(x^{m-1}) < 0 \leq u_{i^m}(z)$である。$x_{i^m}^{m-1} = 0$である場合を考える。任意の$m = 2, \cdots, M-1$に対して、$x_{i^m} \neq z_{i^m}$であるから、$x_{i^m} = x_{i^m}^{m-1} = 0$より、$z_{i^m} > 0$である。$x_{i^m} = 0$ならば$w_{i^m} = 0$である。$z$ indom wかつ$z_{i^m} > 0$かつ$w_{i^m} = 0$より、i^mが最初に異議を唱えるときに、$u_{i^m}(z) > 0$が成り立つ。ゆえに、$u_{i^m}(x^{m-1}) = 0 < u_{i^m}(z)$が成り立つ。(証明終)

定理2の証明　補題3より、$L \subset I$であるから、Iが整合集合であることを示せばよい。補題3の証明における異議を考慮すれば、Iは外部整合性を満たす。以下において、Iが内部整合性を満たすことを示す。すなわち、任意の$x \in I$、任意の$z \in X$、任意の$i \in N$に対して、$x \rightarrow_i z$ならば、$w \in I$が存在して、$w = z$あるいはw indom z、かつ、$u_i(w) \leq u_i(x)$である。

$x \in P$である場合を考える。このとき、$S \in Q$が存在して、$x \in S$である。$z \in S$ならば、$z \in P$より、$z \in I$である。Sは本質的に単集合であるから、$u_i(z) = u_i(x)$である。$z \in X \backslash S$ならば、補題7より、x indom zである。

$x \in I \backslash P$である場合を考える。$i \in N$が複数存在して$\alpha_i < \gamma$という仮定より、$j \neq i$が存在して、$\alpha_j < \gamma$である。このとき、$w \in X$が存在して、$j \in N$が一意に存在して、$w_j = x_j^* = \arg\max_{x_j \in X_j} u_j(x_j, f(x_j))$であり、任意の$k \neq j$に対して、$w_k = 0$である。$x_j^*$は一意に存在するから、任意の$v \in X$に対して、$v \neq w$ならば、$u_j(v) < u_j(w)$である。ゆえに、$w \in P$である。$P \subset I$より、$w \in I$である。$w \in P$より、$S \in Q$が存在して、$w \in S$である。$z \in X \backslash S$ならば、補題7より、$w$ indom zである。$w_i = 0$かつ$x \in I$より、$u_i(w) = 0 \leq u_i(x)$である。$z \in S$ならば、$z \in P$より、$z \in I$である。$z \in S$かつ$w \in S$より、Sは本質的に単集合であるから、$u_i(z) = u_i(w) = 0 \leq u_i(x)$が成り立つ。(証明終)

5. 結論と今後の研究課題

平均収穫ゲームにおいて、遠視眼的な安定集合と最大整合集合について分析をおこなった。遠視眼的な安定集合は複数存在するが、そのすべてが本質的に単集合である。遠視眼的な安定集合の和集合はパレート最適な戦略プロファイルの集合に等しい。他方、最大整合集合は一意に存在するが、パレート最適な戦略プロファイルの集合だけでなく個人合理的な戦略プロファイルの集合も含む巨大な集合になる。

Xue（1998）は、完全予見（*perfect foresight*）なプレイヤーを考慮しないから、遠視眼的な安定集合は小さすぎる集合になり、最大整合集合は大きすぎる集合になることを例証した。今後の研究課題として、平均収穫ゲームにおいて、完全予見なプレイヤーを仮定した場合に、長期的視野に立った個人安定的な戦略プロファイルの集合がパレート最適な戦略プロファイルの集合と一致するかどうかについて検証することはとても興味深い。

参考文献

Chwe, M.S.-Y. (1994). "Farsighted coalitional stability," *Journal of Economic Theory* 63, 299-325.

Greenberg, J. (1990). The Theory of Social Situations: An Alternative Game-Theoretic Approach, Cambridge University Press.

Masuda, T. (2002). "Farsighted stability in average return games," *Mathematical Social Sciences* 44, 169-181

Moulin, H. and Watts, A. (1997). "Two versions of the tragedy of the commons," *Economic Design* 2, 399-421.

Watts, A. (1996). "On the uniqueness of equilibrium in Cournot oligopoly and other games," *Games and Economic Behavior* 13, 269-285.

Xue, L. (1998). "Coalitional stability under perfect foresight," *Economic Theory* 11, 603-627