平成15年度

不確実性下におけるプロジェクト評価
―リアル・オプション・アプローチ―

大学院　経営学研究科　経営学専攻
博士後期課程 3年 4310010007番
董　晶　輝

平成 15 年度

東洋大学大学院経営学研究科

博士学位請求論文

不確実性下におけるプロジェクト評価

—リアル・オプション・アプローチ—

平成 15 年 10 月 24 日提出

博士後期課程　4310010007 番
氏名　董　晶輝
DONG Jinghui

不確実性下におけるプロジェクト評価

—リアル・オプション・アプローチ—

董　晶輝

DONG Jinghui

序文

経済の自由化、グローバル化の中、企業の経営環境が大きく変わりつつある。多くの投資機会が生まれると同時に経営のリスクも増してきている。このような経営環境の中で、リスクを考慮に取り入れた上、柔軟な経営意思決定が要求されるので、従来の投資決定基準では対応できなくなってきている。企業の成長機会がオプションに類似するという新しい発想から生まれた「リアル・オプション (real options)」は、天然資源の開発プロジェクトへの応用の研究から不確実性下における様々な投資プロジェクトの評価とそれに関連する投資決定問題に広がった。リアル・オプション・アプローチは経営の柔軟性をプロジェクトの潜在的価値として評価する革新的理論であると同時に、不確実性下における企業の意思決定の枠組を提供している。実物資産の評価にオプションの評価理論を応用する学術論文が 20 年ほど前からファイナンスの文献に現れ始めたが、近年では、リアル・オプションの理論研究と実務での応用の両方において大きな進展を遂げている。今後、リアル・オプション・アプローチはコーポレート・ファイナンスの理論と実務において重大な影響を及ぼすことが確実である。

ファイナンス理論の発展がリアル・オプション理論の展開に大きく寄与しいる。ノーベル賞を受賞した Black and Sholes[5] と Merton[39] によるオプション評価理論の研究は画期的なものであり、その後の多くの研究者による一連の状態請求権評価理論の研究がリアル・オプション理論研究の基礎となっている。しかし、リアル・オプションは現実の経営環境と企業の意思決定問題に密接に関連しており、ファイナンス理論を直接に応用することができず、それぞれの状況に対応した理論研究と実践での応用が展開されなければならない。リアル・オプションの研究は独自的な展開を遂げているが、研究の課題も多く残されている。

経済学部在学中から、ファイナンス理論に興味を持ち始め、ファイナンス理論を学んでいるうちに、ファイナンス理論の実践的な応用となるリアル・オプションの研究を知り、リアル・オプションの研究を決意し、経営学研究科の後期課程に進むことを決めた。経営学を熟知するため、経営学研究科での研究生を 1 年間在籍し、経営学の知識を学びながら、リアル・オプション理論の研究を始めた。先行研究を検証した上、いくつかテーマについて研究を行い、研究の内容とその成果をこの一冊にまとめた。本論文は以下のように構成される。

第 1 章では、研究の背景と目的を述べた後、不確実性下における投資意思決定の特性を明確にし、伝統的投資評価理論の問題点を指摘し、リアル・オプション・アプロー

チの基本的な考え方を整理する。リアル・オプション理論の主な先行研究を分類整理して、ぞれぞれの研究テーマの位置づけを明らかにしながら、研究の内容を紹介したい。

第2章では投資意思決定の最も基本的な問題である参入と撤退意思決定を扱い、参入と撤退を同時に考える参入・撤退モデルを用いて議論する。参入・撤退モデルで得られた分析の結果を一方的な参入モデルと一方的な撤退モデルと比較し、柔軟な意思決定の効果を明らかにした。さらに、数値例を用いてそれぞれのパラメータが参入と撤退の臨界値に与える影響を分析した。第3章では、段階的に実施されるプロジェクトの評価について議論する。R&D 投資プロジェクト評価を例に複合オプション評価理論に類似する評価手法を展開し、基本評価モデルを確立した。それを用いて、投資の実行時点が確率的で、かつ競争的な状況下においてプロジェクト評価と投資戦略を分析した。第4章と第5章は確率的利子率の下でのプロジェクト評価について議論する。今まで、リアル・オプションの研究では確率的利子率を使用するモデルはほとんどなかった。第4章では確率的利子率の下でのプロジェクト評価の基本枠組を確立し、第5章ではより一般的な状況に対応する評価モデルに拡張した。このモデルにおける数値計算法を研究し、確率的利子率がプロジェクト価値に与える影響を数値例で検証し、利子率の不確実性を無視できないことが明らかになった。現実の多くの投資意思決定は競争状況下で行われているのに対し、リアル・オプション・アプローチによる投資評価と意思決定の先行研究では、単独の企業の意思決定問題として扱うのか、あるいは単純な競争構造を仮定して議論することが多い。第6章と第7章は、多数の企業が競争する市場における投資の意思決定とプロジェクトの評価について議論する。第6章では、多数の企業が逐次に市場に参入する場合について、投資の意思決定とプロジェクト価値の推移を分析する。第7章では、コスト構造が異なる多数の企業が同時に市場への参入を考える場合について、それぞれの企業の最適参入行動を分析し、投資の意思決定を導出して、プロジェクト価値を求めた。数値例を用いて競争の状態が投資の意思決定とプロジェクト価値に与える影響を分析し、先行研究での議論が不十分であることを示した。

第8章は全体の総括として、論文の内容について回顧し、本論文の理論的貢献に触れ、今後のいくつかの課題を示して、論文の締めくくりとした。

学位請求論文を完成する上で、大学院経営学研究科の先生方からいただいたご指導に感謝の意を表したい。

研究生としての在籍中から、小椋康宏先生からご指導をいただき、経営学の基本を学んだ。先生は責務の重い後期課程の主指導教授を快く受け入れ、後期課程での勉学の道が開けた。経営財務の視点から研究を展開するようご指導をいただき、研究の本筋を得た。この3年間に、先生は研究の進捗状況にいつも関心を寄せ、研究の進み方に適切なアドバイスをし、研究が円滑に進展した。研究以外に、留学生活にも、先生から温かい心づかいをいただいた。

旭貴朗先生は後期課程からの指導教授であり、先生からは数理的展開、コンピュー

タ・プログラミングのご指導をいただき、研究の進展、内容の充実に多大な益を受けた。また、先生は貴重な時間を割いて論文の内容を入念に確認していだたいた。

松行康夫先生は後期課程３年次の指導教授であり、先生からは研究の作法、哲学的思考についてご指導をいただき、研究の内容に対して、先生は短期間で実に深く理解し、研究の更なる展開の可能性、本論文の作成に多くのアドバイスをいただいた。

飯原慶雄先生は後期課程の指導教授であり、先生からファイナンス理論についてご指導をいただき、いくつかの共同研究を発表した。先生が職を退けた後も度々ご指導をいただいた。

最後に、今まで留学中、特に東洋大学在学中に教えていただいた先生方、机を並べた多くの同窓たち、日常の事務的なことで支えられた職員たちに感謝の意を表したい。

目 次

表 目 次

図目次

第1章　序論

1.1　研究の背景と目的

オプションは現在あるいは将来の時点に、ある行動をとる義務ではなく、権利のことである。オプションという概念は古くから存在し、オプション料（プレミアム）の評価も長期にわたって考えられていた。多種多様なオプションの中、株式や債券のような有価証券を買い、売り、あるいは交換する権利である金融オプションの取引が活発で、オプション・プレミアムの評価に特に関心が集まる。ノーベル賞を受賞したBlack and Scholes[5]とMerton[39]の論文はさまざまなオプションおよび状態請求権の評価に関する研究の基礎的文献となっている。

Myers[40]は初めて企業の市場価値は現在の資産からの期待キャッシュフローの現在価値と企業の成長機会の価値を含むと論じた。企業の成長機会が金融オプションと類似することから、Myersは企業の成長機会を「リアル・オプション(real options)」[1]と呼んだ。リアル・オプション理論は不確実性下おける柔軟な投資決定の効果を分析する手段を提供し、経営の柔軟性をプロジェクトの付加的価値として数量的に計上することに成功した。

1985年に、リアル・オプションの理論的基礎となる論文が発表された。Brennan and Schwartz[9]とMcDonald and Siegel[37]はコストなしで一時的に操業を中止できる投資プロジェクトの評価を研究した。Brennan and Schwartz[9]は銅の価格が低下したときに、銅鉱の採掘を一時的に休止し、その後、価格が上昇したときに再び銅鉱の採掘を再開するような銅鉱の採掘プロジェクトを評価し、リアル・オプションを応用することのメリットを示している。続いて、McDonald and Siegel[38]は、現在多くのリアル・オプション理論の研究に応用されている基本モデルを開発した。彼らは、投資を最適な投資実行時点までに待つことの価値を評価し、不確実なマーケットにおいて、企業は投資からのキャッシュフローの現在価値が投資コストをかなり上回るまで投資を延期すべきと示した。彼らは最適な投資臨界値を求め、不確実性の増加により臨界値が上昇するため、投資からのキャッシュフローの現在価値が上昇することを示した。

80年後半から90年代にわたり、リアル・オプション理論が急速に展開され、活発

[1]Amram and Kulatilaka[1]の序文では、Myersは新しい用語”real options”の考案者であると記している。

な研究分野となっている。天然資源の開発に応用した研究から、製造業、研究開発、発電、規制産業、買収合併、リース、国際投資、不動産と土地開発、企業戦略、等々に応用されている。プロジェクトの評価の視点から、リアル・オプションはいくつかの基本的タイプに分類することができる。廃止オプション、段階オプション、スイッチング・オプション、拡張あるいは縮小オプション、戦略的成長オプション、などである。そのほかに、ゲーム論的な枠組をリアル・オプション分析に取り入れることによって、競争がプロジェクトの価値に与える影響が分析されている。近年では、理論的な研究だけではなく、実用的な研究も行われている。今後、リアル・オプション理論は投資プロジェクトの評価と投資の意思決定に大きな影響を及ぼすと予想される。

リアル・オプション理論に関する基礎的研究が多く発表されているが、これらの論文は大抵単純なモデルで基本的な考え方を示している。現実の投資意思決定はより複雑な状況の下で行わなければならない。プロジェクトの投資、運営には多様な柔軟的な対応が可能である。現実に対応した実践的に応用可能なモデルの開発がリアル・オプション研究の重要な課題となっている。本研究では、先行研究を基に、いくつかのタイプのリアル・オプションについて理論的にさらに発展させるとともにできるだけ現実に対応するモデルを開発し、リアル・オプション理論の発展に貢献することを目指している。

1.2 リアル・オプションの基本的考え方

この節では、リアル・オプション・アプローチの基本的考え方について簡潔に整理しておく[2]。資本投資で状況に応じた柔軟な意思決定を認識することの重要性、なぜ柔軟な意思決定を無視した伝統的な投資評価の方法が不適切なものであるかについて説明する。状況に応じた柔軟な意思決定による価値の増分がプロジェクトの価値に追加されることから、投資プロジェクトの価値が増大する。リアル・オプション理論は単なる投資を評価する道具だけではなく、投資決定の枠組を提供する。

1.2.1 投資の環境と柔軟性

投資の意思決定に関して、状況に応じた柔軟な意思決定が必要でない状況が考えられる。ひとつは、意思決定者が完全な情報を有する場合である。もし、投資に関連する将来の状況が完全に分かっていれば、将来の最適意思決定の経路が予め決められる

[2]より詳細な説明はリアル・オプションに関する解説書を参照。Amram and Kulatilaka[1]、Trigeorgis[53] は経営戦略の視点からリアル・オプション理論とその応用を解説している。Dixit and Pindyck[18] はリアル・オプション理論に関する初期の研究成果をいくつかのトピックに分けてまとめている。山本・刈屋 [59] は実務者向けの入門書で、Copeland and Antikarov[12]、Brach[7] は実務者向けの詳しい解説書である。

ので、状況に応じた柔軟な意思決定の必要はない。ふたつ目は下された投資の意思決定が完全に取り消し可能（可逆的）な場合である。投資プロジェクトが任意の時点で費用なしに投資する前の状態に戻せるのであれば、リスクは存在しない。この二つの状況下では、投資の意思決定をリスクなしで下すことができ、状況に応じた柔軟な意思決定の価値がないため、投資プロジェクトの評価は将来のキャッシュフローを無危険利子率で割り引くのみである。当然、これは現実の経営が直面している投資環境ではない。

意思決定者が将来の経営環境の変化を完全に予測することが不可能であるため、投資プロジェクトには常に不確実性が伴う。企業が直面する不確実性は基本的に二つの側面からなる。外部的不確実性は企業を取り巻く複雑に変動する外部環境から由来する。例えば労働、資本、原材料、生産物市場の状況、または技術、法制、政治、社会、経済の状況など企業を取り巻く条件がそれに当たるものである。これと対照的に、内部的不確実性はノウハウの伝達、組織の変遷、現在あるいは将来の企業の従業員の知識や働く動機などに由来する。投資の意思決定における不確実性は、例えば、製品の価格が不確実に変動すること、あるいは市場全体の需要が不確実に変化することにより発生する。また、R&Dは望ましい結果が得られるか否かは明確ではないため、R&Dプロジェクトにはしばしば高度な不確実性を伴う。不確実性を数量的捉えるため、不確実的状態について確率分布を用いて表現する。

投資の意思決定において、もう一つ重要な決定要因は不可逆性である。投資は一旦実行されるとコストなしで取り消すことはできない。ある製品を生産するために一旦建設された生産設備は、不利な経済状況で閉鎖することは可能であるが、生産設備の投資コストを完全に回収することはできない。これは投資財の特異性と中古投資財市場の不完備性によるものである[3]。投資財は通常、企業あるいは産業に特有なものであり、他の企業にとってはもともとの投資者より価値が少ない。結果として、投資財は時間価値で算定された価格で売却することはできない。マーケティングや広告のような企業固有の投資コストは、ほぼ全額回収不能であり、これらは完全な埋没費用と認識される。

不確実性と不可逆性による損失の可能性を限定的にするため、意思決定者は状況に応じた柔軟な意思決定を行わなければならない。柔軟性は簡単に言えば、意思決定者の新しい状況に対して新しい戦略を適用する能力のことである。

柔軟性は「防衛的」と「攻撃的」な性格を持っている。前者の例としては、製品の価格が下落したときの一時的な操業の停止や、投入財の価格が上昇したときの代替的投入財への変換などがある。後者の例としては、製品の価格が上昇した場合や、需要が拡大した場合の生産の拡張などがある。不確実性と不可逆性の下では、柔軟性の防衛的な面では投資プロジェクトの損失を限定的なものにし、攻撃的な面では利益を増大させる。

[3]Dixit and Pindyck[18] の 8 ページを参照。

1.2.2　伝統的投資評価理論

過去５０年以上にわたって投資の決定基準として考えられてきたのは正味現在価値(net present value, NPV)ルールであった。この方法の基本的な考え方は、割引期待キャッシュフローの総和と投資コストの現在価値の差が正であれば、投資プロジェクトを実行し、そうでなければ放棄するとするというものである。正味現在価値は割引キャッシュフロー(discounted cash flow, DCF)法で計算される。資本資産評価モデルによるリスク修正後の割引率を求める以外、過去長い間にわたってＤＣＦ法はそのまま利用されてきた。将来のキャッシュフローが正確に予測できれば、ＤＣＦは良い結果をもたらすが、これは、投資環境が確実で、プロジェクトの期間がそう長くない場合に限る。しかし、大多数の投資の意思決定はそうでない状況下で行わなければならない。将来のキャッシュフローを正確に予測できないことはＤＣＦ法を応用することの最大の難点である。

従来のＮＰＶ法は企業があるシナリオの通りに行動するものとして、投資を評価している。この方法では、最初の決定を変更しないと仮定し、将来の不確実に変化する環境に対応して、元来のシナリオから離脱することを無視している。結果として、企業が望ましい変化から収益を拡大することも、状況が悪化したときに損失を減少することもできないと仮定して、プロジェクトを評価し、柔軟な意思決定が評価されないことになる。したがって、従来のＮＰＶ法は、不確実性と不可逆性が存在する場合の投資価値を過小に評価し、間違った投資決定を導く可能性がある。

ディシジョン・ツリー分析(Decision Tree Analysis DTA)は、投資プロジェクトに含まれる柔軟性を企業の直面する不確実的状態とそれに対応する意思決定の流れを分解して考える。樹状に分解された状態とそれに対応する意思決定から、投資プロジェクトの価値が計算され、現実にそれぞれの状態が実現したときの最適意思決定が与えられる。この点においてはDTA法が従来のＮＰＶ法の最初の状態によりプロジェクトの採用と廃棄を決定する単純な意思決定を回避している。ＤＴＡ法は異なる時点で状況が不確実に変化する場合に、投資の意思決定とプロジェクトの評価における有用な方法である。

ＤＴＡは柔軟性をプロジェクトの評価に配慮することを可能にしたが、実務的な応用では限界がある。一般に、経営の直面する確率的な環境は連続的に展開する。これを離散的な状態に分割して分析すると、正確さを保障できない。状態の分割を連続的な展開に接近すると、膨大な作業になってしまう。現実には、不確実的な事象が起きたとき、あるいはある経営の行動を行ったとき、将来のキャッシュフローの分布とリスクの構造が変化する。ＤＴＡ法でプロジェクトを正確に評価するために、各期についてリスク修正済みの割引率を見つけ出さなければならないので、適切な割引率を見つけ出すことも大きな負担となる。

総括すると、従来のＮＰＶ法では柔軟な意思決定が考慮されないし、ＤＴＡでは連

続的な状態や確率過程を扱うことができず、これら伝統的評価法は、不確実的な環境でプロジェクトを評価するには限界がある。しかし、投資のメリットを示す指標としては正味現在価値以外には存在しない。ただし、従来のNPVルールのような単純な方法は理論的欠点があり、これを認識せずに実務に応用することがさらに問題となる。最近の20年間に開発されたリアル・オプション・アプローチはこれら伝統的評価法を拡張したものであり、異なる手法で正味現在価値を求め、投資の意思決定を導く革新的な理論である。次の節では、リアル・オプション・アプローチの基本的な考え方について整理してみる。

1.2.3 新しい投資評価理論に向けて

リアル・オプション・アプローチによる投資プロジェクト評価は、柔軟な意思決定を実物資産に対するオプションと解釈し、資産市場で取引されている金融オプションの評価理論を応用する考え方から始まる。

リアル・オプションの考え方は3つの認識の上に成り立っている。第1、柔軟な意思決定をオプションと解釈することで、従来のＮＰＶ法を拡張し、柔軟性の価値をプロジェクトの潜在的価値として計上する。第2、リアル・オプションを金融オプションのように評価するためには、いくつかの点について仮定を満たさなければならない。第3、リアル・オプションと金融オプションの類似と限界が認識され、独自の理論研究を展開されなければならない。

従来のNPV法は柔軟な意思決定を考慮せずにプロジェクトを評価しているので、DCF法で計算されたプロジェクトの正味現在価値は投資の基本価値とすれば、柔軟な意思決定による追加的な価値を投資プロジェクトの価値に計上しなければならない。柔軟な意思決定は経営行動をとる義務ではなく、選択の権利をであるから、オプション的な特徴を有し、投資プロジェクトの価値はオプション価値に類似すると考えられる。

柔軟な意思決定をどのように数値的に評価するのかという問題を解決するために、金融資産と実物資産への投資の類似性を考える。金融オプションは、オプションの所有者に予め決められた条件で、ある金融資産と他の金融資産を交換する義務ではなく、権利を与える契約のことをいう。例えば、株式のコール・オプションは、オプションの所有者に予め決められた価格で、この株式を購入する権利を与える契約であり、この株式を予め決められた価格で売る権利を与える契約はプット・オプションである。権利行使の時点が予め決められた場合はヨーロピアン・タイプであり、満期までにいつでも権利行使できるのがアメリカン・タイプである。金融オプションの価値は二つの部分で構成される。第一部分はオプションを直ちに行使するときの価値、これがオプションの本源価値と呼ばれる。コール・オプションの本源価値は原資産価格が行使価格より多きければ、その差であり、そうでなければ権利行使をせずに、0である。第二部分はオプションの時間価値である。これはオプションの価格と本源価値との差で

表 1.1: プロジェクトの投資機会と株式コール・オプション

	プロジェクトの投資機会	株式コール・オプション
原資産価格	プロジェクトの実行価値	現在の株価
行使価格	投資コスト	購入価格
行使期間	投資機会の存続期間	満期（まで）
リスク	プロジェクト価値の不確実性	株価の不確実性
割引率	資金の時間的価値	無危険利子率

表される。オプションの時間価値は原資産価格の確率的な変動により、権利行使時の本源価値を高める可能性を反映している。権利行使時はオプションの時間が 0 となるので、オプションの価値は本源価値となる。

企業はプロジェクトの投資コストと引き換えにプロジェクトの現在価値を購入する権利を持っていると解釈することができる。NPV ルールでは企業が直ちにオプションの権利をしなければならないような状況、あるいは将来時点で必ず権利を行使するような状況に相当する。NPV が正である場合は、オプションがイン・ザ・マネー (in the money) の場合に相当し、、NPV はオプションの本源価値に相当するが、時間価値を失ってしまう非合理的な投資決定を導く。他方、NPV が負である場合は、オプションがアウトオフ・ザ・マネー (out of the money) の場合に相当するが、NPV ルールに従うと、プロジェクトを却下することになり、投資機会が正の価値を持っていることを無視することになる。企業の投資決定を投資オプションの行使とみなせば、企業はこのオプションを必ずしも直ちに行使する必要はなく、よりよい状況を待って投資を実行したほうが適切である場合もありうる。投資機会のオプション的な特徴から、金融市場のオプション価格理論[4]、あるいはダイナミック・プログラミングといった数学的手法により、最適な投資ルールを導き、柔軟な意思決定をプロジェクト価値に数値的に計上することができる。

リアル・オプションは金融オプションのように契約を購入することで発生する権利のことではなく、一般に、ある経営上の行動をとる機会のことであるから、リアル・オプション・アプローチによるプロジェクトの評価はプロジェクトの特性によりさまざまなモデルを構築する必要があり、金融オプションの評価手法をそのまま利用することはできない。評価モデルに使用されるパラメータも必ずしも一致するものではない。表 1.1 はプロジェクトの投資機会と株式コール・オプションの評価に使用されるパラメータの比較を表したものである。

リアル・オプションは柔軟性の種類により分類され、次に挙げたのは代表的なものである。

[4]Bjork[4] および Neftci [43] は条件付状態請求権の数学的基礎を詳細に説明している。Hull[22] は各種デリヴァティブについて詳細に説明している。Duffie[19] は資産評価につて理論的展開している。

- 延期オプションは、プロジェクトの開始を延期する機会であり、投資コストが行使価格に相当する。将来のよりよい状況を見極めた上、投資を行う柔軟な意思決定をプロジェクトの評価に取り入れるリアル・オプションとして、多くのプロジェクトの評価で利用できる。アメリカン・コール・オプションに類似するリアル・オプションである。

- 中止オプションは一定の費用を支出することによってプロジェクトを廃棄する機会であり、支出される費用は行使価格に相当するもので、費用が正の場合はネットのサルベージ価値が発生するときで、費用が負の場合はプロジェクトの整理費用（従業員の解雇、工場の解体費用など）がサルベージ価値を上回るときである。中止オプションはアメリカン・プット・オプションに類似する。

- 縮小オプションはプロジェクトの一部を売却する機会である。将来の状況がよくなる見込み少はないが、製品の需要が完全になくなる訳ではない状況で、新しい製品が開発されるまで生産量を落としてシェアを維持し、消費者ニーズに答える経営戦略がそれに当たる。アメリカン・プット・オプションに類似するものである。

- 拡張オプションは縮小オプションとは反対に将来の状況がよくなれば、プロジェクトを拡大する機会である。拡張コストが行使価格に相当するもので、アメリカン・コール・オプションに類似する。

- 延長オプションはプロジェクトの操業を延長できる機会である。将来長期にわたってプロジェクトの好収益が見込まれ、一定の費用（設備維持や更新あるいは修理にかかる費用など）を支払うことでプロジェクトの操業を引き伸ばす。アメリカン・コール・オプションに類似する。

- スイッチング・オプションはアメリカン・コール・オプションとプット・オプションを組み合わせたポートフォリオに類似する。一定のコストをかけることによって2種類の操業モードの間で変換が可能となる。例えば、発電所の操業で、燃料の価格によって重油を燃やしたり、天然ガスを使ったりすることで収益を向上させる機会である。

- コンパウンド・オプションはオプションに対するオプションである。投資が段階的に行われるプロジェクトの評価に用いる方法である。例えば、プロジェクトの実行過程が、研究開発、工場設計、施工などの段階からなる場合、各段階の終わりに新たな情報が利用可能となって、次の段階で中止や延期を選択する。

- レインボー・オプションは複数の不確実性に影響されるオプションである。プロジェクトの多くは、製品価格と売上数量の不確実性や、キャッシュフローの現在価値に影響を与える金利の不確実性にも左右されるので、プロジェクトを評価する際に、これらの不確実な要因を同時に考える必要がある。

オプションの評価手法を投資機会の評価に応用することで、投資プロジェクトの将来価値を予測する必要がなく、投資プロジェクトの将来の価値変化を表す確率過程を定義すれば十分である。リアル・オプション理論は、単に投資機会を数量的に評価するだけではなく、プロジェクト・マネジメントの最適戦略を決定する。例えば、延期オプションは、いつ、どのような状況の下で、プロジェクトの投資を実行すべきかについて示してくれる。また、リアル・オプション・アプローチでは、不確実性と投資価値の関係を明確に示している。一般に、原資産価格の分散の増大は、原資産の将来の価値の変動範囲を増幅させ、オプションの価値が上昇する。従って、投資環境の不確実性が大きほど、将来の投資価値が増大する可能性を持っているので、投資機会の価値も大きくなる。

リアル・オプション・アプローチは単に伝統的投資評価理論を拡張し、柔軟な意思決定を数量的に評価に成功しただけではなく、意思決定の枠組を提供する革新的理論である。

1.3 主な先行研究

離散的な投資機会を「成長オプション」と考える基本的なアイディアはMyers[40]から始まる。Kester[28]はこの基本アイディアの上に、企業の成長機会の戦略的と競争的な側面について論じた。Brennan and Schwartz[9]とMcDonald and Siegel[37]は一時的停止と操業再開のオプションについて分析した。特に、Brennan and Schwartz[9]は先物契約を用いた確実等価(certainty equivalent)による自然資源開発プロジェクトの評価法を示している。McDonald and Siegel[38]は投資を延期するか開始するかのオプションについて評価し、企業は投資価値が投資コストをかなり上回るまで投資を延期すべきと示した。彼らは、最適の投資臨界値を求め、オプションの価値が不確実性の増加により上昇するため、臨界値も不確実性の増加により上昇することを示した。Pindyck[46]はオプション評価法と動的計画法を用いて、連続時間モデルで、不可逆性と不確実性の下での投資プロジェクトの評価と投資の意思決定を議論している。Dixit[16]はリアル・オプション理論を用いて、企業はなぜ、製品価格が長期的平均コストを相当に上回るまでに投資をしないのか、価格が操業コストより下がった場合、長い期間において持続的に操業の損失が発生してもビジネスから撤退をしないのかを論じている。これらの論文はリアル・オプション理論を研究する基礎的な文献となっている。

いろいろなタイプのリアル・オプションを評価する研究は次の代表的な文献が挙げられる。投資の延期オプションについては、McDonald and Siegel[38]以外に、Poddock, Siegel and Smith[48]は海外の石油資源のリースの評価を例に投資のタイミングについて議論し、リアル・オプション・アプローチの利点を強調している。Ingersoll and Ross[23]は利子率が不確実の場合について、投資の延期を再考し、利子率が低下した

ときに必ずしも投資が増加するとは限らないことを示した。Myers and Majd[42] は廃業オプションについて、プロジェクトを永久に廃業する代わりにサルベージ価値が得られる機会をアメリカン・プット・オプションとみなして分析している。操業規模と資本能力の選択については、Pindyck[45] と He and Pindyck[32] で議論されている。生産投入と生産技術の変換のオプションについて、Kulatilaka[30] は２つの燃料を変換できる工業用ボイラと単一燃料の工業用ボイラを比較しながら生産投入の柔軟性を評価している。Kulatilaka and Trigeorgis[31] は製造分野での弾力的な製造技術や多用途機械による製造システムの柔軟性を分析している。段階的投資の評価について、Majd and Pindyck[35] は完成に時間のかかる段階的に建設されるプロジェクトの各段階での延期オプションを評価し、各段階での最大投資の割合について分析している。Trigeorgis[52] は多数のリアル・オプションの相互的影響の性質に焦点を置き、合成されたリアル・オプションについて分析している。

基礎的な理論研究を基に、理論モデルの拡張と応用についての研究も盛んに行われいる。Dixit[15]、Choi and Lee[10] は企業が参入と撤退を同時に考えるときの意思決定について分析している。Pindyck[47] は投資コストが不確実に変動する場合の投資意思決定について分析し、原子力発電所の資本投資の応用について議論している。Kemna[27] は海外の油田開発のタイミングや、製造ベンチャーにおける成長オプションの評価と石油精錬装置の廃業の意思決定における実例を述べている。Kogut and Kilatilaka[29] は為替レートが不確実に変動する環境で、多国籍企業が市場への参入、資本能力の選択および生産投入の変換の柔軟性について分析している。Schwartz and Moon[49] は段階的審査と許可が必要な新薬開発投資の評価について議論した。最近、リアル・オプションの説明力についての実証研究も行われている。研究例はまだ少ないが、これからは活発になる研究課題のひとつとなることは違いない。

投資の意思決定においては競争を考えるのは重要なことである。Leahy[33] は完全競争市場で、需要が確率的に変動する場合について、企業の生産能力を拡張する行動を分析し、競争均衡での最適投資決定を導出した。Grenadier[21] は寡占市場で、需要の確率的変動に対する企業の生産能力の拡張問題について議論している。競争市場での新規参入問題については、Dixit and Pindyck[18] は第８章で、完全競争市場での参入問題について議論し、第９章で、寡占市場での参入問題を取り上げ、２企業の競争モデルを例に参入の順序が任意の場合と参入の順序が予め決められた場合について企業の投資意思決定を分析した。Baba[2] は２企業競争モデルを銀行の貸し出し市場での競争問題に応用し、銀行の貸し出し決定について議論をしている。Joaquin and Butler[25] はコスト構造が異なる２つ企業の参入問題について議論し、コストによって参入の順序が決まると証明している。オプション分析にゲーム論的道具を追加することで、投資の意思決定に競争を組み込むことが可能となった。競争状況下における投資決定の分析、プロジェクトの評価は今後重要な研究課題となる。

多数の不確実的要因あるいは多数の相互作用するリアル・オプションが含まれるような現実の複雑な状況では、いつも解析的な解が存在するとは限らない。このような

場合には、数値解析が利用される。オプション評価のための数値解析法は主に二つのタイプがある。ひとつは直接に元の確率過程を近似するもので、もうひとつは微分方程式について近似するものである。前者には格子法やシミュレーション法が含まれる。Cox, Ross, and Rubinstain[14] は標準的2項格子法であり、Boyle[6] は初めてモンテ・カルロ・シミュレーションをオプションの評価に応用した。後者には陰的有限差分法と陽的有限差分法が含まれる。Cortazar[13] はリアル・オプション評価に利用されるこれらの数値解析テクニックを総括している。

1.4 研究の内容

第2章では投資決定での最も基本的な問題である参入（投資）と撤退（廃業）について議論する。リアル・オプション理論の早期の研究中で、McDonald and Siegel[38] は参入のタイミングについて議論し、最適の投資臨界値を求めた。Myers and Majd[42] は廃業の意思決定について議論した。これらのモデルでは、一旦投資あるいは廃業をすると、永久にこのような状態が続くと仮定して議論し、その上で最適意思決定を導いている。このようなモデルを一方的な参入モデルと一方的な撤退モデルと呼ぶことにする。実際の投資を考えると、一旦投資が実行されても、状況が悪化すれば、企業はプロジェクトから撤退し、状況が好転すれば再び参入するのが合理的である。投資の計画時にこのような柔軟な投資戦略を考慮し、参入と撤退の水準を同時に求めれば、プロジェクト価値を評価することもできる。このような参入と撤退を同時に考える投資評価モデルを参入・撤退モデルと呼ぶ。参入・撤退モデルについはDixit[15] によって議論され、Dixit and Pindyck[18] の中で詳しく説明されいている。そこでは、製品の価格が確率的に変化し、投資コストが一定の場合について議論している。投資コストが確率的変動する場合については、簡単に触れただけである。Choi and Lee[10] は、この議論を拡張し、投資コストが確率的変動する場合について議論している。これらのモデルでは、一旦投資が実行されると追加的費用なしに1単位の生産を継続できると仮定している。

現実にプロジェクトを運営するには、一回限り支出する投資コストよりも、継続に支出しなければならない生産コストの変動に関心が集まる。そこで、第2章では、以上の先行研究とは異なる設定で参入・撤退モデルを構築する。プロジェクトからの収入とそのための生産費用が確率的に変動するとし、投資コストが投資実行時点での収入に比例する部分と生産費用に比例する部分の和であるとし、プロジェクトの残存価値が撤退時点での収入に比例する部分と生産コストに比例する部分の和であると仮定し、収入と生産コストの比で参入と撤退の臨界値を求め、プロジェクトの価値を評価する。参入・撤退モデルと一方的な参入モデルおよび一方的な撤退モデルを比較し、一方的な参入モデルより参入・撤退モデルの参入臨界値が小さく、一方的な撤退モデルより参入・撤退モデルでの撤退臨界値が大きいことが判明され、参入・撤退モデル

でプロジェクトが高く評価されることが明らかになった。数値解析を用いて、各パラメータについて感度分析をした。

第3章では段階的に実行されるプロジェクトの評価について議論する。リアル・オプション・アプローチによる投資決定に関する早期の文献では、投資機会が既に存在し、且つ永久に存在するとして議論を展開することが多い。現実にはある条件が満たされるときにのみ投資が可能となり、または投資段階が依存関係にある場合もありうる。段階的に展開するプロジェクトがその例である。段階的に展開するプロジェクトの評価について、Schwartz and Moon[49] は段階的審査と許可が必要な新薬研究開発投資の評価について議論をしている。Ottoo[44] は R&D とマーケティング活動関連付けて、R&D プロジェクトの評価を取り上げているが、Black and Scholes[5] モデルを利用して個別に評価している。Copeland and Antikarov[12] は複合オプション (compound option) のように触れているが、2項モデルを使用している。この章では、連続時間モデルを用いて複合オプションに類似する手法で、プロジェクトの価値を求める。

R&D に成功すれば、企業は収益拡大の可能性を得られる。しかし、R&D 投資は高い収益を得られる機会を持つと同時に、リスクの高い投資でもある。R&D プロジェクトが将来成功するのか、いつ成功するのか、また競争企業より先に成功するのか如何かはすべて不確実である。また、R&D に成功後のプロジェクトの運営も R&D 投資価値に影響を与える。R&D の実行を意思決定する際に、より柔軟なプロジェクトの運営の下で R&D を評価する必要がある。一般に、新しい製品が開発された後、それを商品化することにより一定の売り上げを得られるが、さらに広告宣伝や販売網の構築など販売拡大に関わるマーケティング活動によって新しい製品が広く消費者に受け入れられれば、さらに生産を拡大しより多くの利益が得られる。この研究では、R&D の成功後、商品化のための投資とマーケティング活動の開始を同時に決定する場合について、R&D 投資を評価する。

商品化の時点で、マーケティング活動が行った場合による将来生産拡大の利益を評価し、これを生産拡張の効果と呼ぶ。生産拡張の効果をマーケティング・コストと比べて、両者の差をマーケティング活動の効果と呼ぶ。マーケティング活動の効果が正であれば、マーケティング活動を行い、そうでなければマーケティング活動を行わないとする。商品化だけに投資した場合に得られる純利益を商品化価値と呼び、それにマーケティング活動の効果を加えて、投資を実行するか否かを判断し、その結果を意思決定プロセスの効果と呼ぶ。意思決定プロセスの効果を R&D 開始時で評価し、これを R&D の効果と呼ぶ。R&D の効果を R&D に必要なコストと比べた上、R&D を開始するかどうかを判断する。

将来の生産拡大の機会はマーケティング活動を行うかどうかによって生み出され、マーケティング活動の効果はオプションに対するオプションである複合オプションと類似するが、意思決定プロセスの効果が複数の状況を表していることから、R&D 効果の評価式が条件によって2本の式わかれる。R&D 効果がオプションの価値と複合オプ

ションの価値の和からなるとそうでない2本の評価式によって表される。このモデルでは、金融オプションを評価するために開発された評価法は単ににリアル・オプションの評価に応用するのではなく、リアル・オプションの独自の特徴を考えた上で、評価法を開発した。R&Dの効果が評価できたことにより、R&Dに関する投資戦略を考えることが可能となった。ここでは、まずR&Dの成功するまでの期間を一定であるとし、基本評価モデルを構築したが、実際のR&Dは成功するまでの期間が不確実で、競争相手が存在する場合が多い。R&Dにおけるこのような特徴を考慮して、R&Dの成功するまでの期間が確率変数で、さらに競争相手が存在する場合についてR&Dの効果の評価を考え、基本モデルを拡張した。モデルの解析的結果について、数値計算法を考案し、数値例を用いてR&Dの投資戦略を分析した。

第4章では利子率が確率的に変動する場合に将来条件付で採用する投資プロジェクトの評価について考える。リアル・オプションによるプロジェクト評価の先行研究では、プロジェクトの投資機会が既に存在し、いつでも投資を実行できるとして議論することがほとんどである。しかし、現実にはプロジェクトの投資がすぐに実行できない状況も多く存在する。一般に投資が実行できるまでに、研究開発や工場の設計などの準備段階が必要となる。準備段階はある程度の期間を要するので、プロジェクトの実行時点で状況が変化し、プロジェクトを実行しないほうが良いことになるかもしれない。現在時点で、プロジェクトの準備に着手するかどうかを決定するためには、プロジェクトの実行時点での柔軟な意思決定の結果を現在時点で評価し、準備費用と比べる必要がある。プロジェクトの実行時点では、プロジェクトを実行した場合に得られるキャッシュフローを評価し、これに投資コストを差し引いたものが正であるときだけプロジェクトを実行する。プロジェクトの存続期間中に得られるキャッシュフローが確率的に変動することは今までの研究で考えられてきたが、プロジェクトは相当長い間に稼動するのが一般的であるので、プロジェクトの準備段階からプロジェクトの稼動中にわたって、利子率が変動するのでプロジェクトを評価する際、利子率の変動要因を考慮しなければならない。リアル・オプション・アプローチによるプロジェクト評価の研究では、利子率を一定と仮定する場合が多い。Berk, Green, and Naik[3]では、将来実行する可能性のあるプロジェクトの評価について確率的に変動する利子率を使用しているが、離散時間モデルで議論し、将来次々と投資機会が発生するときの企業価値を求めることに重点をおいて、キャッシュフローの変動についてはやや特殊な仮定をしている。

この研究では、連続時間モデルを用いて、キャッシュフローの変動が対数正規分布に従うとし、投資コストがキャッシュフローと比例関係にある場合について、確率的に変動する利子率の下でプロジェクトの評価を考える。まず、投資実行時のプロジェクトの価値を評価する。プロジェクトを実行した場合に将来時点で得られる確率的キャッシュフローを確率的利子率を用いて期待価値を計算し、プロジェクトの存続期間中のキャッシュフローの現在価値をすべて足すと、投資実行時のプロジェクトの価値となる。次に、準備段階前のプロジェクト価値を評価する。この際、オプションの評価理

論が応用されるが、投資実行時で評価されたプロジェクトの価値が対数正規確率変数にならないので、直接に Black and Scholes[5] 型の評価式を適用することができない。ここでは、Jamshidian[24] が債券ポートフォリオのオプションを評価した際に用いた手法を利用した。プロジェクト評価式を導出前に２変量対数正規確率変数のオプション評価式を導出し、これを適用してプロジェクト評価式を導出した。この評価式を利用する場合には数値積分で計算することになるので、数値計算法を考えた。最後に数値例を用いて確率的利子率を使用する代わりに債券価格を直接利用してプロジェクトを評価した場合の結果と比較し、パラメータの感度分析を行った。

第４章では、投資コストがキャッシュフローと比例関係にあると仮定して議論を進めた。この仮定はプロジェクトの投資環境をある程度表しているが、より一般的な投資環境を考えると投資コストを別の確率変数として扱う必要がある。第５章では、第４章のモデルを拡張し、投資コストとキャッシュフローが確率的に変動する場合、確率的利子率を用いて、将来条件付で採用されるプロジェクトの評価を考える。第４章を基本モデルとして、さらに投資コストとキャッシュフローの比について条件付期待を計算し、二重積分の形となる評価式が得られた。評価式の数値計算を考え、数値分析を用いて確率的利子率がプロジェクト価値に与える影響を分析した。この研究で、確率的利子率の下で、プロジェクトからのキャッシュフローと投資コストが共に確率的変動する場合、将来条件付で採用するプロジェクト評価の方法を確立した。さらに、数値分析により利子率の不確実性は無視できないことを明らかにした。

第６章では、競争産業における投資決定とプロジェクト評価について考える。リアル・オプション・アプローチによる投資決定とプロジェクト評価に関する初期の文献では、他の企業を考慮することなく、単独企業の意思決定問題として扱われる場合がほとんどである。現実の投資環境においては、企業が市場での競争、例えば新規の参入あるいは既存企業の生産能力の拡張を考慮に入れなければならない。Leahy[33] は完全競争市場において、需要が確率的に変動する場合に企業の生産能力の拡張行動を分析し、競争均衡での最適投資決定を導いた。Grenadier[21] は寡占市場において、需要の確率的変動に対する企業の生産能力の拡張問題を議論し、競争均衡での投資決定と投資機会の価値について分析した。企業の新規参入問題については、Dixit and Pindyck[18] の８章では、完全競争産業における企業の参入について議論している。９章では、寡占産業での参入問題を取り上げ、２企業の参入モデルで、企業が市場に参入する順序が任意の場合と参入の順序が予め決められた場合についてそれぞれの企業の行動と企業価値を分析している。Baba[2] は Dixit and Pindyck[18] の２企業モデルを銀行の貸し出し市場での競争問題に応用し、銀行の貸し出し決定を分析した。Joaquin and Butler[25] はコスト構造が異なる２つの企業の競争参入問題を分析し、生産コストの違いが企業の参入順序を決めると証明している。

この研究では、多くの企業が次々と市場に参入する場合について分析する。このモデルでは、すべての企業が他の企業の行動を認識した上で合理的に行動すると考える。Joaquin and Butler[25] では線形的需要関数を考え、そこでの競争均衡を分析してい

るが、ここでは需要の価格弾力性が一定の需要関数を考え、そこでの競争均衡の特性を明らかにし、それを共通認識としている多数の企業が逐次に市場参入する投資環境での参入問題について分析する。企業は参入時に初期投資を行い、その後は追加投資なしに生産量を自由に調整することができるものとし、単位生産量当たりの生産コストを一定と仮定する。市場に参入した企業は他の企業の供給量を所与として、利潤が最大になるように各自の生産量を決定する。まだ市場に参入していない企業は、需要の状況についての確率変数がある水準に到達するまで待ち続ける。参入水準は投資の正味現在価値が最大になるような水準が選ばれ、参入水準に到達すると、直ちに投資を行い、市場に参入する。

このような競争市場と企業行動の下で、企業の利潤とその現在価値を計算し、将来他の企業が参入する場合の企業価値を表す一般式を求める。その上で、各企業の最適参入水準を求め、後方帰納法により企業価値の計算式を導出する。得られた解析的結果について数値例を用いて分析し、競争の影響を明らかにした。ここで考えているような投資環境においては、競争する企業数に関わらず、それぞれの企業の最適参入水準は変わらないが、競争する企業が多いほど、企業価値が下がる。これまで最終的参入する企業数を１ないし２企業に限定して分析することにより、企業の投資機会が高く評価されてきたが、このモデルでは企業の投資機会は最終的どれだけの企業が参入するかによってその値が大きく変わってくることが示された。

第７章では、コスト構造の異なる数多くの企業が競争する市場において企業の投資決定について分析する。第６章と違う点は、この章では、意思決定時点で、数多くの企業が同時に参入しようと考え、それぞれの企業は他の企業の参入を考慮したうえで、参入後に得られる利潤の現在価値を最大にするように、市場へ参入する順序と参入水準を決定することである。多数企業の競争市場を分析する前に、まず２企業の競争市場について分析し、コスト構造の違いが企業の市場へ参入順序を決め、投資コストが一致の場合生産コストが低い企業から順次に参入することを示した。２企業の競争市場で企業の参入順序と参入水準を明らかにした後、多数企業の競争市場での投資決定を分析し、それぞれ企業の参入水準を求めた。競争の効果を分析するため、数値例を用いて競争する企業数が異なる場合の企業の参入水準と企業価値の変化を調べた。競争する企業数が増えると参入水準が低下するが、企業間のコスト差によって、参入水準に与える影響が異なることが明らかになった。競争する企業数が多くなるほど、企業価値が減少し、投資利益が零に近づく。

第2章　不確実性下での参入・撤退

2.1　始めに

企業のプロジェクト評価にあたって、将来の状況に応じて柔軟に対応する可能性を考慮して評価を行うオプション・アプローチが、一般に採用されるようになってきている。リアル・オプション・アプローチにもいろいろなタイプがあるが、参入・撤退型のモデルが標準的な形であると考えられる[1]。このモデルについては、Dixit & Pindyk[18]でも詳しく説明されている。ただ、そこでは、製品の価格が幾何ブラウン運動し、投資コストが一定のケースについて述べて、投資コストが確率的に変動する場合の取り扱いについては、簡単に触れてあるだけである。最近、Choi & Lee[10] がこのケースについて詳しく分析している。それらモデルでは、投資プロジェクトからの生産数量を1単位とし、その価格が確率的に変動するものとし、一定の投資コストを支出すると、追加的な費用を支出することなしに、永久に1単位のものを生産し続けることができると仮定している。追加的コストなしに生産が行われ、製品の価格が幾何ブラウン運動するものとすると、将来のキャッシュフローはマイナスになることはない。しかし、現実には、状況が悪化すれば、キャッシュフローがマイナスになることもありうるので、ここでは、プロジェクトを実行すると、1単位のものを永久に生産できるが、それらの収入とその生産を行うための費用がともに確率的に変動する場合について考えることにする。また、投資コストについて、投資実行時点の販売収入に比例する部分と生産費用に比例する部分の和の形で表現できる場合について考察する。プロジェクトのコストには、販売収入や生産費用と独立に変動する部分が存在するかもしれないが、この形でコストをある程度近似させることは可能であり、これまでのモデルを含むより一般的な形になっているので、この形について分析することは有意義であると考えられる。撤退の際のプロジェクトの残存価値についても同様の形を仮定する。

これまでの参入・撤退モデルでは、参入及び撤退は製品の価格水準あるいは製品価格と投資コストの比率の水準に依存して決まる。ここでは、それに対し、収入と費用の比率の水準に依存する。いずれにしても、これらの水準とプロジェクトの価値を決

[1]Brennan and Schwartz[9]、Ingersoll and Ross[23]、Dixit[15] と McDonald and Siegel[38] は、この分野の初期の研究である。Dixit and Pindyck[18] は基礎的理論と初期の研究を多数のテーマに分けてまとめたものである。Dixit and Pindyck[17] は需要が確率的に変化し、投資コストが時間と共に確定的に変化する場合を議論したものである。飯原 [57] は製品価格が確率的に変化し、生産コストが一定の場合に、撤退の決定について分析したものである。

める2個のパラメータを決定するために、4本の方程式から、4個の未知数を求めることになる。ここでは、この問題を段階的に解くことを試みる。

リアル・オプション・アプローチでは、将来の撤退の可能性を考慮しないで、参入の問題だけを考えたり、逆に、撤退について、将来再び参入する可能性を考慮しないモデルを考えることがある。これらのモデルでは参入水準や撤退水準を明示的に表すことができるので、しばしば利用されるが、将来の撤退あるいは再参入の可能性を考慮したときとは、参入あるいは撤退の水準が異なるものとなる。参入あるいは撤退の水準はどのように変化するかについて、数値的に検討してみた。

2.2 モデル

企業がある分野での生産技術と販売能力と持っている。市場では数多くの需要と供給のショックが起きるので、企業の収入と生産コストは確率的に変化する。このような企業を取り巻く経済環境に基づいて、ある時にはこの分野に参入したり、ある時にはこの分野から撤退したり、さらに再参入すると考えるのはより現実的である。このように考えた時、企業が実行するプロジェクトの期待現在価値をどのように評価するのかをこのモデルで明かにする。確率変数である収入をRとし、コストをCとする。R, C の変化はともに幾何ブラウン運動に従うとする。R と C の確率微分をそれぞれ次のように表す。

$$dR = \mu_R R dt + \sigma_R R dZ_R \tag{2.1}$$

$$dC = \mu_C C dt + \sigma_C C dZ_C \tag{2.2}$$

ここで μ_R、μ_C、σ_R、σ_C は一定値のパラメータで、Z_R と Z_C は相関係数が ρ となるウィーナー過程である。

企業が生産に参入していない時にも、生産に参入する機会を持っているので、参入することによって発生するキャッシュ・フローの期待現在価値を生産に参入するオプションの価値と考えて、それを $V(R,C)$ と定義する。それに対し、生産を行っている時のプロジェクトからのキャッシュ・フローの期待現在価値を $W(R,C)$ とする。生産に参入する際の投資コストは参入時点の R と C の関数であると考え、投資コスト $I(R,C)$ は次の形で表されるものとする。

$$I(R,C) = K_R R + K_C C \tag{2.3}$$

K_R と K_C は一定値のパラメータである。状況が悪化し、生産から撤退する時には、設備等を売却して、再び参入の機会を待つ。売却額は撤退時の R と C の関数であると考えて、これを $S(R,C)$ で表す。

$$S(R,C) = \gamma_R K_R R + \gamma_C K_C C \tag{2.4}$$

γ_R と γ_C は一定値のパラメータである。

生産を行っていない時のプロジェクトの期待現在価値は無リスク利子率を r とすると

$$V(R,C) = e^{-rdt}E^*[V(R,C) + dV(R,C)|R_t = R, C_t = C] \tag{2.5}$$

と表現できる。$E^*[\cdot]$ はリスク中立的確率測度の下での期待値を表す。リスク中立的評価を行うために (2.1) 式と (2.2) 式のドリフト率 μ_R と μ_C をそれぞれ $r-\delta_R$ と $r-\delta_C$ に変更し、伊藤のレンマを用いて確率微分 $dV(R,C)$ を書き直すと

$$\begin{aligned} V(R,C) \quad &= (1-rdt)\{V + [\frac{1}{2}\sigma_R^2 R^2 V_{RR} + \rho\sigma_R\sigma_C RCV_{RC} \\ &+\frac{1}{2}\sigma_C^2 C^2 V_{CC} + (r-\delta_R)RV_R + (r-\delta_C)CV_C]dt\} \end{aligned} \tag{2.6}$$

となり、これから次の微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma_R^2 R^2 V_{RR} + \rho\sigma_R\sigma_C RCV_{RC} + \frac{1}{2}\sigma_C C^2 V_{CC} \\ &+(r-\delta_R)RV_R + (r-\delta_C)CV_C - rV = 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

δ_R と δ_C は、収入と費用についてのリスクを考慮した割引率を r_R と r_C とすると

$$\delta_R = r_R - \mu_R,\ \delta_C = r_C - \mu_C \tag{2.8}$$

という関係がある。

現に生産を行っている場合には、プロジェクトの期待現在価値は生産による利潤が加わるので $W(R,C)$ を次のように表現できる。

$$W(R,C) = e^{-rt}E^*[W(R,C) + dW(R,C) + (R-C)dt|R_t = R, C_t = C] \tag{2.9}$$

$V(R,C)$ と同様にして $W(R,C)$ は次の微分方程式を満たす。

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\sigma_R^2 R^2 W_{RR} + \rho\sigma_R\sigma_C RCW_{RC} + \frac{1}{2}\sigma_C C^2 W_{CC} \\ &+(r-\delta_R)RW_R + (r-\delta_C)CW_C + (R-C) - rW = 0 \end{aligned} \tag{2.10}$$

微分方程式 (2.8) と (2.11) を解くため、次の関係式を定義する。

$$Q \equiv \frac{R}{C},\ X(Q) \equiv \frac{V(R,C)}{C},\ Y(Q) \equiv \frac{W(R,C)}{C} \tag{2.11}$$

$X(Q)$、$Y(Q)$ をそれぞれ R と C について微分し、それらを (2.8) と (2.11) 式に代入すると、

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Q^2 X_{QQ} + (\delta_R - \delta_C)QX_Q - \delta_C = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{1}{2}\sigma^2 Q^2 Y_{QQ} + (\delta_R - \delta_C) Q Y_Q - \delta_C Y + (Q-1) = 0 \tag{2.13}$$

を得る。ここで、

$$\sigma^2 = \sigma_R^2 - 2\rho\sigma_R\sigma_C + \sigma_C^2 \tag{2.14}$$

は Q の分散である。

また、生産に参入する時の投資コストと撤退する時の残存価値も C を基準にして表現することにより次のようになる。

$$i(Q) = \frac{I(R,C)}{C} = K_R Q + K_C \tag{2.15}$$

$$s(Q) = \frac{S(R,C)}{C} = \gamma_R K_R Q + \gamma_C K_C \tag{2.16}$$

微分方程式 (2.12)(2.13) の解はそれぞれ、

$$X(Q) = A_0 Q^{\alpha} + B Q^{\beta} \tag{2.17}$$

$$Y(Q) = A Q^{\alpha} + B_1 Q^{\beta} + \frac{Q}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} \tag{2.18}$$

となり、A、A_0、B、B_1 はそれぞれ境界条件から決まる定数で、α と β は２次方程式：

$$\frac{1}{2}x(x-1)\sigma^2 + x(\delta_C - \delta_R) - \delta_C = 0 \tag{2.19}$$

２根で、α を負根、β を正根とする。

(2.17) 式は C を１とした時の生産に参入していないときのプロジェクトのオプション価値を表している。収入と費用の比すなわち Q の値が十分小さい時、生産に参入の可能性がなくなるので、オプションの価値はゼロに近付く。α は負数である故、この境界条件を満たすには $A_0 = 0$ でなければならない。(2.18) 式の右辺最後の２項は C を１とした時にプロジェクトが将来永遠に生産が続く場合の利潤の割引現在価値で、右辺最初の２項は撤退の可能性を考慮することによって生まれるプロジェクトの価値の増分を表している。収入と費用の比すなわち Q の値が十分に大きい時には、撤退の可能性がなくなるので、この価値の増分はゼロに近付く。β は正数の故、この境界条件を満たすには $B_1 = 0$ でなければならない。(2.17)、(2.18) 式は次のようになる。

$$X(Q) = B Q^{\beta} \tag{2.20}$$

$$Y(Q) = A Q^{\alpha} + \frac{Q}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} \tag{2.21}$$

この２つの式は生産に参入していないプロジェクトの期待現在価値と生産に参入しているプロジェクトの期待現在価値を生産費用を基準として表現したものある。$X(Q)$、$Y(Q)$ に C を掛けると $V(R,C)$ と $W(R,C)$ になる。

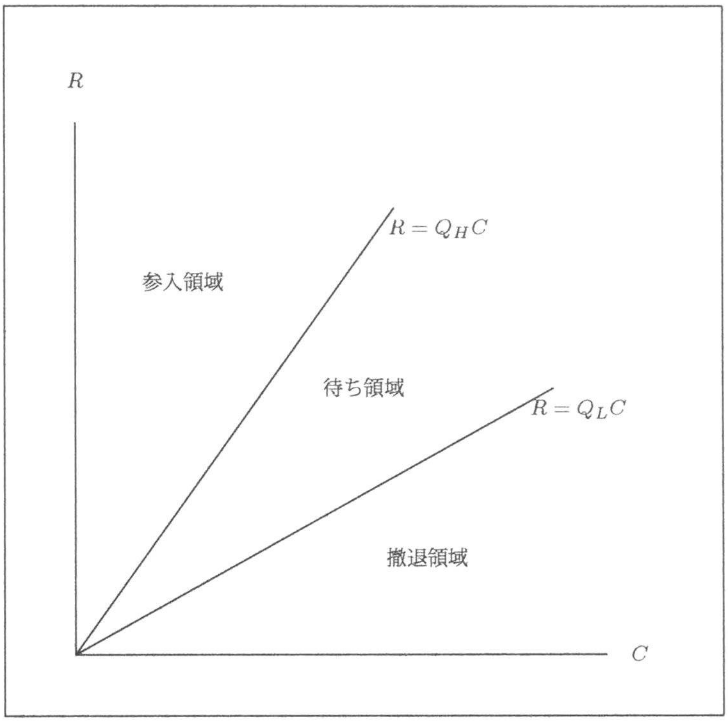

図 2.1: 参入・撤退の区域

2.3 最適参入・撤退ルール

最適参入・撤退の決定は R と C の比率に依存し、参入・撤退の境界は (C, R) の 2 次空間において原点を通る直線で表される。R と C の比がある値に達した時企業が生産に参入あるいは撤退する。臨界値をそれぞれ Q_H、Q_L とすると、状態が (C, R) 平面で縦軸 R と直線 $R = Q_H C$ 間の領域にあれば企業は生産に参入し、直線 $R = Q_L C$ と横軸 C 間の領域にあれば生産から撤退し、両直線間の領域にあれば状態の変化を待つ。これを示したのが図 2.1 である。

上述の参入・撤退ルールに従って企業が生産に参入する時の価値対等条件 (Value Matching Condition) は

$$BQ_H^{\beta} = AQ_H^{\alpha} + \frac{Q_H}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} - (K_R Q_H + K_C) \tag{2.22}$$

であり、滑らかな張り合わせ条件 (Smooth Pasting Condition) は、

$$\beta BQ_H^{\beta-1} = \alpha AQ_H^{\alpha-1} + \frac{1}{\delta_R} - K_R \tag{2.23}$$

となる。

生産から撤退する時の価値対等条件は、

$$BQ_L^{\beta} = AQ_L^{\alpha} + \frac{Q_L}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} - (\gamma_R K_R Q_L + \gamma_C K_C) \tag{2.24}$$

であり、滑らかな張り合わせ条件は、

$$\beta BQ_L^{\beta-1} = \alpha AQ_L^{\alpha-1} + \frac{1}{\delta_R} - \gamma_R K_R \tag{2.25}$$

となる。

説明と数式を簡単にするため、新たな符号を定義する：

$$m_{CH} \equiv \frac{1}{\delta_C} + K_C,\ m_{CL} \equiv \frac{1}{\delta_C} + \gamma_C K_C,$$
$$m_{RH} \equiv \frac{1}{\delta_R} - K_R,\ m_{RL} \equiv \frac{1}{\delta_R} - \gamma_R K_R$$

(2.22) から (2.25) の 4 本の数式を整理して、上で定義した符号を代入すると

$$BQ_H^{\beta} = AQ_H^{\alpha} + m_{RH}Q_H - m_{CH} \tag{2.22'}$$

$$B\beta Q_H^{\beta} = A\alpha Q_H^{\alpha} + m_{RH}Q_H \tag{2.23'}$$

$$BQ_L^{\beta} = AQ_L^{\alpha} + m_{RL}Q_L - m_{CL} \tag{2.24'}$$

$$B\beta Q_L^{\beta} = A\alpha Q_L^{\alpha} + m_{RL}Q_L \tag{2.25'}$$

になる。$\mathrm{m}_{RH}Q_H$ は永久に生産を継続したときの販売額の期待現在価値 R/δ_R を C で割ったものに、参入時の投資コストのうち、販売額に比例する部分 $K_R R$ を C で割ったものを差し引いたのもである。これに対して、m_{CH} は生産コストの期待現在価値 C/δ_C と投資コストのうち、生産費用に比例する部分 $K_C C$ を加えたものを C で割ったものである。従って、$\mathrm{m}_{RH}Q_H - \mathrm{m}_{CH}$ は永久に生産を続けるとしたときの、プロジェクト実行時の正味現在価値である。これに対し、$\mathrm{m}_{CL} - \mathrm{m}_{RL}Q_L$ は撤退時に得られる収入から撤退によって得られなくなる将来の販売額と生産費用の期待現在価値を差し引いたものである。

(2.22') から (2.25') の 4 本の方程式から A、B、Q_H、Q_L を段階的に解くことができる。まず、(2.22') と (2.23')、(2.24') と (2.25') の 2 組の方程式に分けて、それぞれの組で A と B について解くと、次の A と B についての式が得られる：

$$A = \frac{(\beta-1)m_{RH}Q_H - \beta m_{CH}}{(\alpha-\beta)Q_H^{\alpha}} = \frac{(\beta-1)m_{RL}Q_L - \beta m_{CL}}{(\alpha-\beta)Q_L^{\beta}} \tag{2.26}$$

$$B = \frac{(\alpha-1)m_{RH}Q_H - \alpha m_{CH}}{(\alpha-\beta)Q_H^\beta} = \frac{(\alpha-1)m_{RL}Q_L - \alpha m_{CL}}{(\alpha-\beta)Q_L^\beta} \tag{2.27}$$

次に、(2.26) と (2.27) から Q_H あるいは Q_L を求める。ここでは Q_H で解くことにする。そのため、まず 1 つの変数を定義しておく：

$$q = \frac{Q_L}{Q_H} \tag{2.28}$$

Q_H と Q_L は、

$$Q_H = \frac{\beta}{\beta-1}\frac{m_{CH}q^\alpha - m_{CL}}{m_{RH}q^\alpha - m_{RL}q} = \frac{\alpha}{\alpha-1}\frac{m_{CH}q^\beta - m_{CL}}{m_{RH}q^\beta - m_{RL}q} \tag{2.29}$$

$$Q_L = qQ_H \tag{2.30}$$

となる。最後に、(2.29) から右側の等式から q を見つければ Q_H と Q_L が得られて、A と B を求めることもできる[2] 。

Q_H、Q_L の性質を明確にするため、次の節で単純なケースを考えて、それと比較する。

2.4 一方的な参入、撤退の場合との比較

この節では、前節で議論した参入・撤退モデルに対して少々条件を変えて、参入、撤退のルール、すなわち R と C の比の臨界値を求めて、前節の結果と比較する。

ここでは一方的な参入、撤退の場合について考える。この場合、生産に参入する時には撤退を考慮せず一旦参入すると永遠に生産を継続すると仮定し、生産から撤退するときには再参入を考えないと仮定する。これらをそれぞれ単純な参入モデルと単純な撤退モデルと呼ぶ。参入、撤退の臨界値をそれぞれ Q_H^* と Q_L^* とする。

単純な参入モデルについて参入時の価値対等条件は、

$$B^* Q_H^{*\beta} = \frac{Q_H^*}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} - (K_R + K_C) \tag{2.31}$$

となり、滑らかな張り合わせ条件は、

$$\beta B^* Q_H^{*(\beta-1)} = \frac{1}{\delta_R} - K_R \tag{2.32}$$

となる。(2.31)、(2.32) 式を書き換えると、

$$B^* Q_H^{*\beta} = m_{RH}Q_H^* - m_{CH} \tag{2.31'}$$

[2]解析的には完全に解くことはできないが、数値計算では簡単に解くことができる。

$$\beta B^* Q_H^{*\beta} = m_{RH} Q_H^* \tag{2.32'}$$

となる。(2.31') と (2.32') 式を解くと臨界値は、

$$Q_H^* = \frac{\beta}{(\beta-1)} \frac{m_{CH}}{m_{RH}} \tag{2.33}$$

となる。

単純な撤退モデルでの撤退時の価値対等条件は、

$$A^* Q_L^{*\alpha} + \frac{Q_L^*}{\delta_R} - \frac{1}{\delta_C} = \gamma_R K_R Q_L^* + \gamma_C K_C \tag{2.34}$$

となり、滑らかな張り合わせ条件は

$$\alpha A^* Q_L^{*(\alpha-1)} + \frac{1}{\delta_R} = \gamma_R K_R \tag{2.35}$$

となる。(2.34)、(2.35) 式を書き換えると、

$$A^* Q_L^{*\alpha} = m_{CL} - m_{RL} Q_L^* \tag{2.34'}$$

$$\alpha A^* Q_L^{*\alpha} = -m_{RL} Q_L^* \tag{2.35'}$$

に変わる。臨界値の解は、

$$Q_L^* = \frac{\alpha}{(\alpha-1)} \frac{m_{CL}}{m_{RL}} \tag{2.36}$$

となる。

詳細な証明は付録に記しているが、直観的に考えて、参入の臨界値は参入・撤退モデルの場合と単純な参入モデルの場合と比較すると、前者の方が低いと考えられる。なぜなら、参入・撤退モデルの場合には参入した後、状況が悪化すれば直ちに撤退し、参入の機会を待つ。単純な参入モデルの場合よりも悪い状況で参入しても利益が得られる。従って、$Q_H^* > Q_H$ が成り立つ。同様の議論で、撤退については逆に $Q_L^* < Q_L$ が成り立つ。同時に、プロジェクトの期待現在価値は高くなる。これらの性質を明らかにするため、次の節ではパラメータの標準的ケースにおけるプロジェクトの期待現在価値を比較し、さらに各パラメータの変化が参入、撤退の臨界値に与える影響を考察する。

2.5　数値計算例

連立方程式 (2.22')〜(2.25') と (2.31')(2.32')、(2.34')、(2.35') を解いてさまざまな性質を比較するため、パラメータの標準的ケースを決めておく。それを表 2.1 でまと

表 2.1: 標準的ケースのパラメータ

パラメータ名	値
収入の資本化率 (δ_R)	0.1
操業コストの資本化率 (δ_C)	0.1
収入の標準偏差 (σ_R)	0.2
操業コストの標準偏差 (σ_C)	0.2
収入と操業コストの相関係数 (ρ)	0
投資コストの係数 (K_R)	1
投資コストの係数 (K_C)	1
残存価値の係数 (γ_R)	0.6
残存価値の係数 (γ_C)	0.6

めた[3] 。

計算の結果、$Q_H=1.714905$、$Q_L=0.801576$、$Q_H^*=2.277397$、$Q_L^*=0.605187$。$Q_H^*>Q_H$、$Q_L^*<Q_L$ は分析通りである。パラメータが変化した時にもこの関係が成り立つのは表 2.5 でわかる。ここで、Q の値を変化させてプロジェクトの期待現在価値を計算し、比較してみる。参入・撤退モデルの場合参入待ちプロジェクトの期待現在価値を X、操業中のプロジェクトの期待現在価値を Y で表す。同様に、単純な参入、撤退モデルの場合のそれぞれに対応するプロジェクトの期待現在価値を X^* と Y^* で表す。Q を 0.5 から 2.5 までに変化させ、それに対応するそれぞれのプロジェクトの期待現在価値は図 2.2 で示している。参入・撤退モデルでのプロジェクトの期待現在価値は単純な参入、撤退モデルでのプロジェクトの期待現在価値を上回っている。参入待ちの状態でのプロジェクトの価値（X と X^*）は、Q が小さくなるにつれて両方は近付くが、Q が大きくなるにつれてかなり差が生じる。これは、Q が小さいときは、参入の可能性が殆どないが、Q が大きくなるにつれ、参入の可能性が増大し、参入した後で撤退の可能性を考慮するかどうかにより、プロジェクトの価値が異なってくることによる。他方、操業中のプロジェクトの期待現在価値は Q が大きくなつにつれて両方が近付くが、Q が小さくなるにつれて両方の差が生じる。これは、Q が小さくなるにつれ、撤退の可能性が増加するが、撤退後の再参入の可能性を考慮するか否かにより、撤退後のキャッシュ・フローが異なることによる。

表 2.5 は他のパラメータが標準的ケースで、パネルで指定されたパラメータが変化した時に臨界値に与える影響を数値的に計算したものである。パネルのすべてのケースにおいて $Q_H^*>Q_H$、$Q_L^*<Q_L$ が成り立っている。次に各パネルの特徴について簡単な説明を加える。

[3]収入と費用についてのリスクを考慮した割引率は r_R と r_C であるが、(2.18) からわかるように、R あるいは C を δ_R あるいは δ_C で割ることにより、生産を永久に続けるときの将来の収入あるいは費用の現在価値が得られるので、δ_R と δ_C を資本化率とよぶことにする。

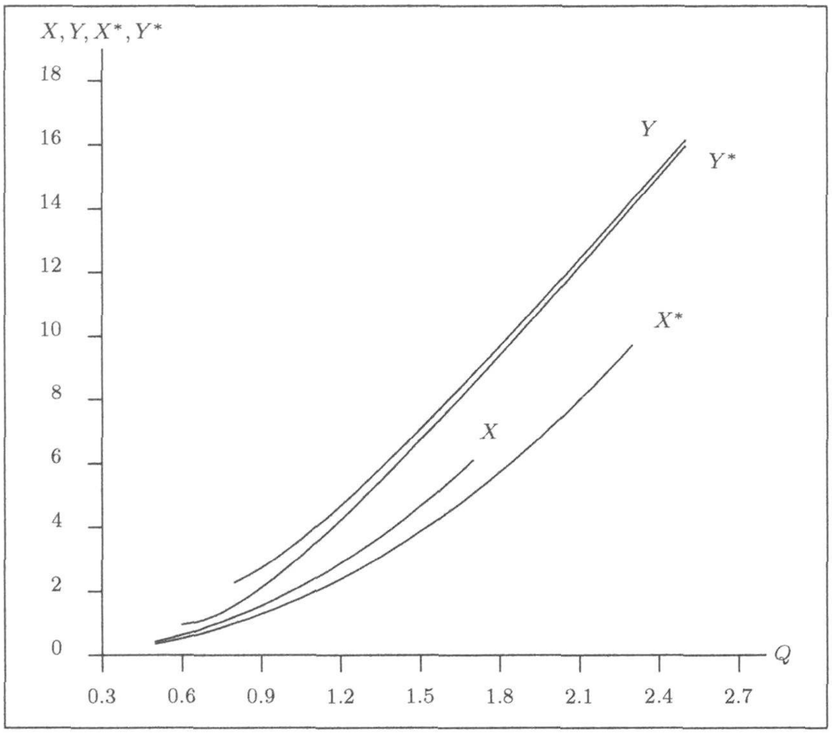

図 2.2: 標準的ケースでの Q の変化とプロジェクトの価値の変化

表 2.2: 各パラメータの変化が臨界値に与える影響

パネル A：収入の資本化率 (δ_R) 図 2.3											
	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800	0.0900	0.1000	0.1100	0.1200	0.1300	0.1400	0.1500
Q_H	1.5516	1.5822	1.6137	1.6463	1.6801	1.7149	1.7509	1.7882	1.8266	1.8664	1.9074
Q_H^*	1.8364	1.9103	1.9923	2.0808	2.1758	2.2774	2.3855	2.5000	2.6208	2.7479	2.8810
Q_L	0.7341	0.7472	0.7604	0.7740	0.7877	0.8016	0.8156	0.8297	0.8440	0.8584	0.8729
Q_L^*	0.3449	0.4042	0.4598	0.5118	0.5603	0.6052	0.6468	0.6843	0.7210	0.7541	0.7849
パネル B：操業コストの資本化率 (δ_C) 図 2.4											
	0.0500	0.0600	0.0700	0.0800	0.0900	0.1000	0.1100	0.1200	0.1300	0.1400	0.1500
Q_H	1.7422	1.7361	1.7303	1.7249	1.7197	1.7149	1.7105	1.7064	1.7027	1.6994	1.6965
Q_H^*	3.6970	3.2045	2.8609	2.6105	2.4222	2.2774	2.1640	2.0741	2.0020	1.9437	1.8964
Q_L	0.8139	0.8116	0.8092	0.8067	0.8042	0.8016	0.7990	0.7962	0.7935	0.7907	0.7880
Q_L^*	0.6916	0.6751	0.6581	0.6406	0.6229	0.6052	0.5876	0.5702	0.5533	0.5368	0.5209
パネル C：収入あるいは操業コストの標準偏差 (σ_R,σ_C) 図 2.5											
	0.0000	0.0400	0.0800	0.1200	0.1600	0.2000	0.2400	0.2800	0.3200	0.3600	0.4000
Q_H	1.5923	1.5985	1.6158	1.6423	1.6760	1.7149	1.7575	1.8027	1.8499	1.8984	1.9481
Q_H^*	1.9045	1.9211	1.9695	2.0472	2.1508	2.2774	2.4248	2.5916	2.7767	2.9795	3.1998
Q_L	0.8641	0.8608	0.8515	0.8376	0.8205	0.8016	0.7818	0.7619	0.7421	0.7227	0.7039
Q_L^*	0.7237	0.7174	0.6998	0.6732	0.6408	0.6052	0.5684	0.5318	0.4964	0.4626	0.4307
パネル D：収入と操業コストの相関係数 (ρ) 図 2.6											
	-0.990	-0.800	-0.600	-0.400	-0.200	0.0000	0.2000	0.4000	0.6000	0.8000	0.9900
Q_H	1.8804	1.8529	1.8221	1.7893	1.7538	1.7149	1.6714	1.6213	1.5603	1.4773	1.2949
Q_H^*	2.9027	2.7888	2.6664	2.5410	2.4117	2.2774	2.1363	1.9854	1.8186	1.6203	1.3020
Q_L	0.7298	0.7408	0.7536	0.7677	0.7835	0.8016	0.8228	0.8486	0.8822	0.9323	1.0643
Q_L^*	0.4748	0.4942	0.5169	0.5424	0.5715	0.6052	0.6452	0.6942	0.7579	0.8506	1.0586
パネル E：投資コストの係数 (K_R) 図 2.7											
	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000
Q_H	1.5828	1.6086	1.6347	1.6611	1.6878	1.7149	1.7424	1.7703	1.7987	1.8264	1.8571
Q_H^*	2.1575	2.1805	2.2039	2.2279	2.2524	2.2774	2.3030	2.3292	2.3559	2.3833	2.4113
Q_L	0.8057	0.8043	0.8033	0.8025	0.8019	0.8016	0.8015	0.8016	0.8018	0.8023	0.8029
Q_L^*	0.5865	0.5901	0.5938	0.5976	0.6014	0.6052	0.6091	0.6130	0.6170	0.6214	0.6251
パネル F：投資コストの係数 (K_C) 図 2.8											
	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	1.0000	1.1000	1.2000	1.3000	1.4000	1.5000
Q_H	1.5913	1.6167	1.6417	1.6664	1.6908	1.7149	1.7388	1.7624	1.7859	1.8092	1.8322
Q_H^*	2.1739	2.1946	2.2153	2.2360	2.2567	2.2774	2.2981	2.3188	2.3395	2.3602	2.3809
Q_L	0.7944	0.7955	0.7968	0.7983	0.7999	0.8016	0.8034	0.8054	0.8074	0.8095	0.8117
Q_L^*	0.5881	0.5915	0.5949	0.5983	0.6018	0.6052	0.6086	0.6120	0.6155	0.6189	0.6223
パネル G：残存価値の係数 (γ_R) 図 2.9											
	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0.9900
Q_H	1.8012	1.7895	1.7769	1.7633	1.7486	1.7325	1.7149	1.6953	1.6733	1.6479	1.6211
Q_H^*	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774
Q_L	0.7050	0.7183	0.7326	0.7478	0.7642	0.7820	0.8016	0.8233	0.8477	0.8760	0.9060
Q_L^*	0.5689	0.5746	0.5805	0.5865	0.5926	0.5988	0.6052	0.6117	0.6183	0.6251	0.6314
パネル H：残存価値の係数 (γ_C) 図 2.10											
	0.0000	0.1000	0.2000	0.3000	0.4000	0.5000	0.6000	0.7000	0.8000	0.9000	0.9900
Q_H	1.8289	1.8127	1.7954	1.7771	1.7578	1.7372	1.7149	1.6908	1.6644	1.6351	1.6056
Q_H^*	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774	2.2774
Q_L	0.7220	0.7341	0.7465	0.7594	0.7728	0.7868	0.8016	0.8172	0.8338	0.8518	0.8693
Q_L^*	0.5709	0.5766	0.5824	0.5881	0.5938	0.5995	0.6052	0.6109	0.6166	0.6223	0.6275

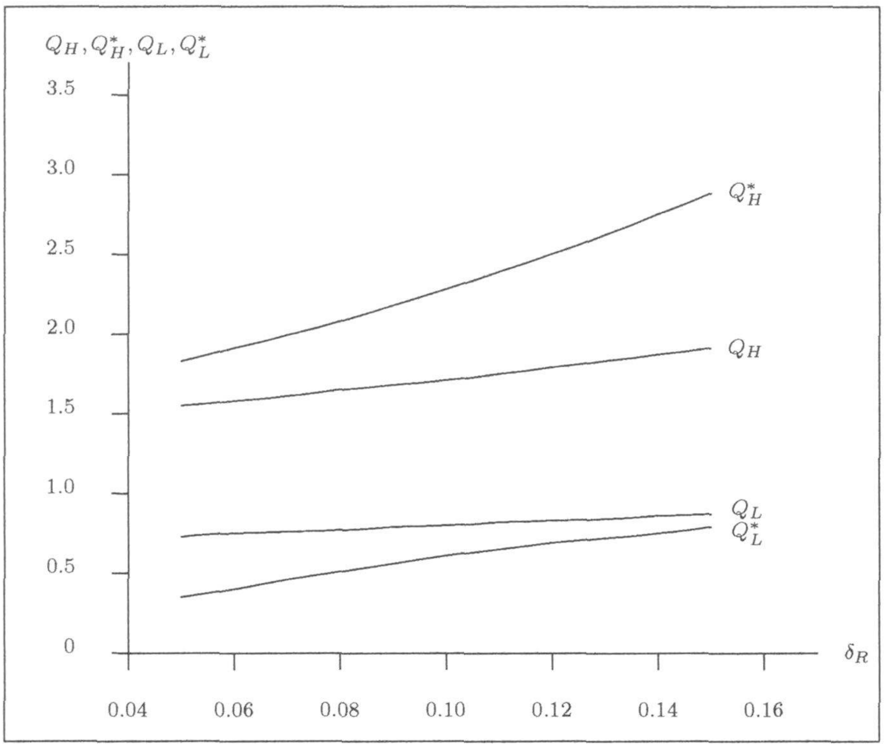

図 2.3: 収入資本化率の変化と最適参入、撤退決定

パネル A は、収入の資本化率の変化が臨界値に与える影響を表している。収入の資本化率の上昇は臨界値を上昇させる。特に単純な参入モデルに影響が大きい。これは収入の資本化率の上昇が将来収入の現在価値を低減させるので、参入時点での収入が操業コストを大きく上回っていなければ採算に合わないことを示している。再参入の可能性を考慮すると、この効果は弱くなる。

パネル B は操業コストの資本化率の変化と最適参入、撤退決定水準の変化を表したものである。操業コストの資本化率の上昇は臨界値を低下させる。特に単純な参入モデルの場合、操業コストの資本化率が小さい時参入の臨界値はかなり高くなる。これは操業コストの資本化率が小さいほど将来のコストの割引現在価値が大きくなるので、臨界値が大きくなる。

パネル C は収入あるいは操業コストの分散の変化が最適参入、撤退決定に与える影響を計算したものである。分散の拡大は参入の臨界値を上昇させるが、撤退の臨界値を低下させる。この影響は参入の方に対して大きい。特に単純な参入モデルの場合は影響が大きい。

パネル D は収入と操業コスト相関係数の変化が参入、撤退の臨界値与える影響を表したものである。相関係数が負の相関 -0.99 から正の相関 0.99 に変化するに対し

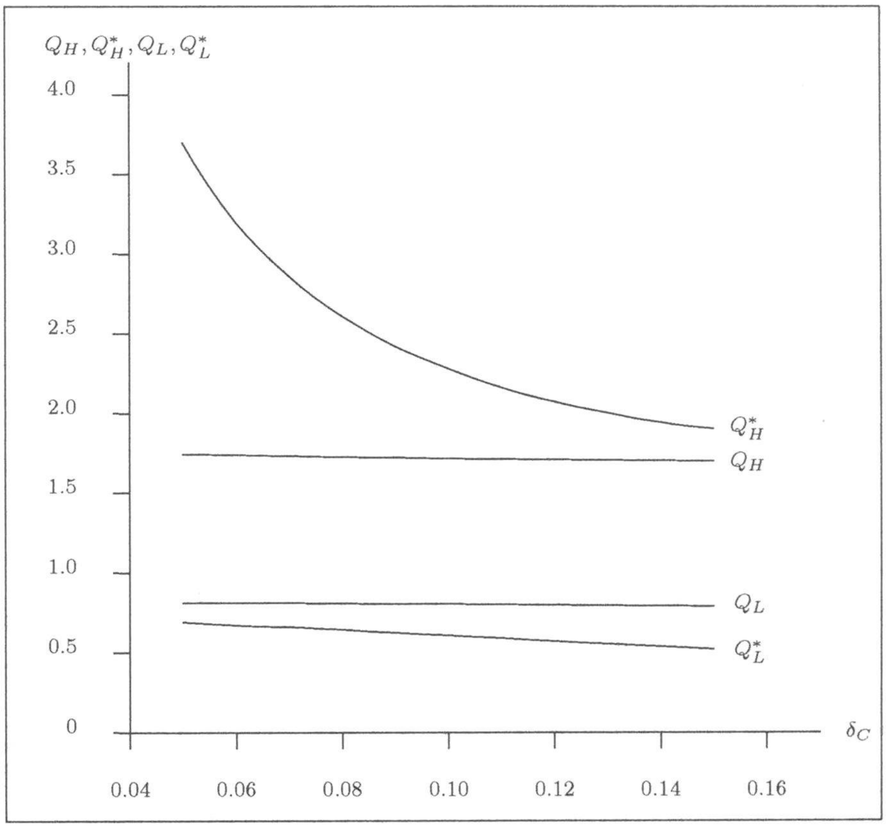

図 2.4: 操業コスト資本化率の変化と参入、撤退決定

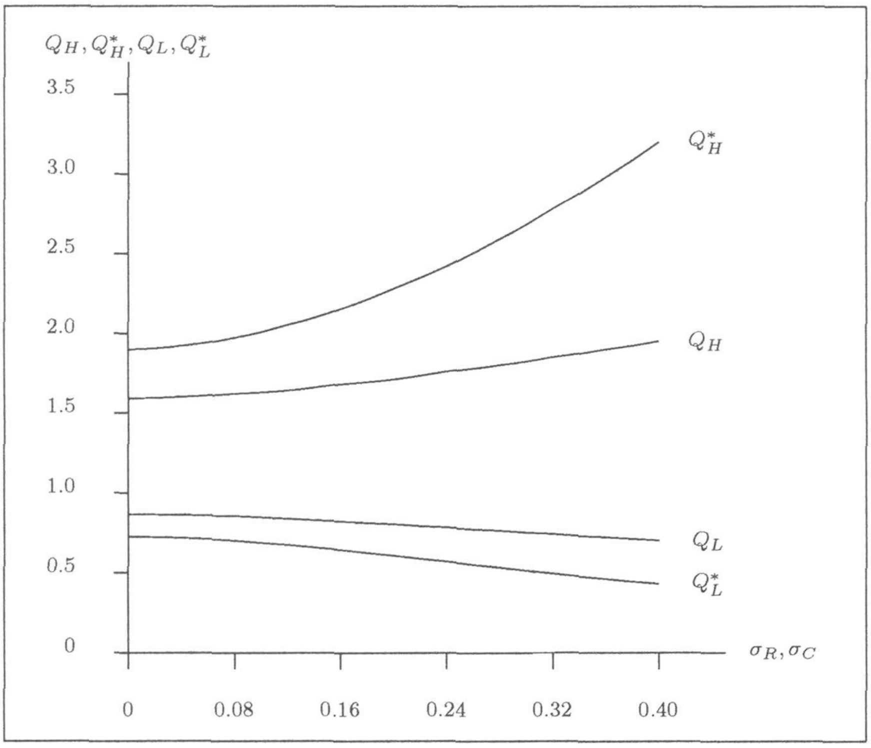

図 2.5: 収入あるいは操業コスト分散の変化と参入、撤退決定

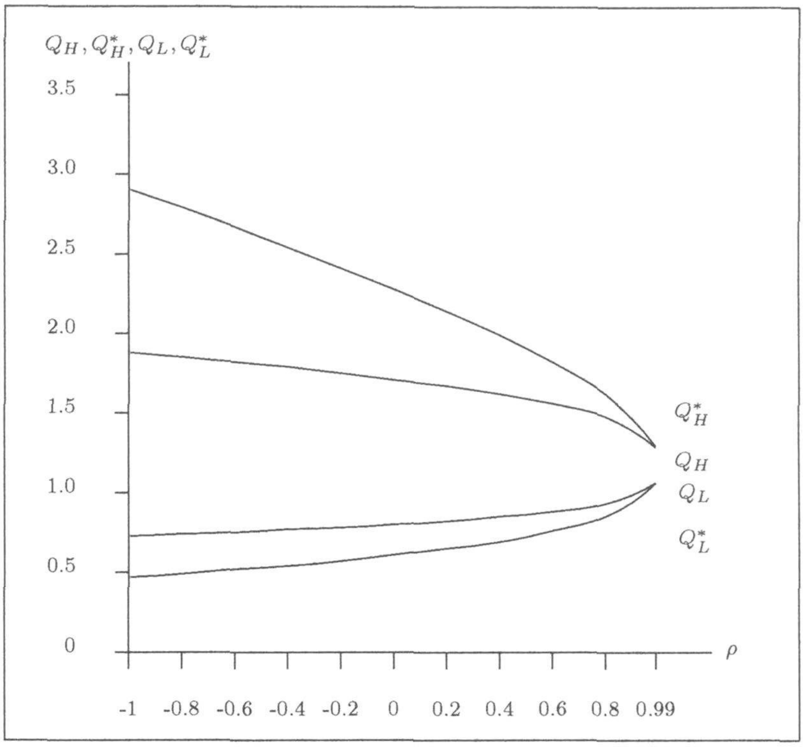

図 2.6: 収入と操業コスト相関係数の変化と参入、撤退決定

て参入の臨界値は小さくなるが、撤退の臨界値は大きくなる。相関係数が 1 に近付くにつれ、参入・撤退モデルと単純な参入モデルでの参入の臨界値、参入・撤退モデルと単純な撤退モデルでの撤退の臨界値はそれぞれ 1 点に収束する。

パネル E は投資コストに含む参入時点の収入に対して比例する部分の比例係数の変化、パネル F は操業コストに対して比例する部分比例係数の変化が参入、撤退の臨界値に与える影響を計算したものである。それぞれの比例係数の増大は参入・撤退モデルと単純な参入モデルの参入臨界値を上昇される。両モデルに対する影響は殆ど同じである。参入・撤退モデルと単純な撤退モデルの撤退の臨界値に与える影響は小さい。

パネル G、パネル H は撤退時点でのプロジェクトの残存価値の収入に対する比例係数の変化と操業コストに対する比例係数の変化が参入あるいは撤退の臨界値に与える影響を計算し

たものである。参入・撤退モデルでは、それぞれの比例の増加は参入の臨界値を低下させ、撤退の臨界値を上昇させる。単純な参入モデルでは、撤退を考えていないので、撤退に伴うプロジェクトの残存価値の変化は参入の臨界値に影響を与えない。他方、単純な撤退モデルでは、残存価値の上昇は撤退水準を上昇させるが、参入・撤退

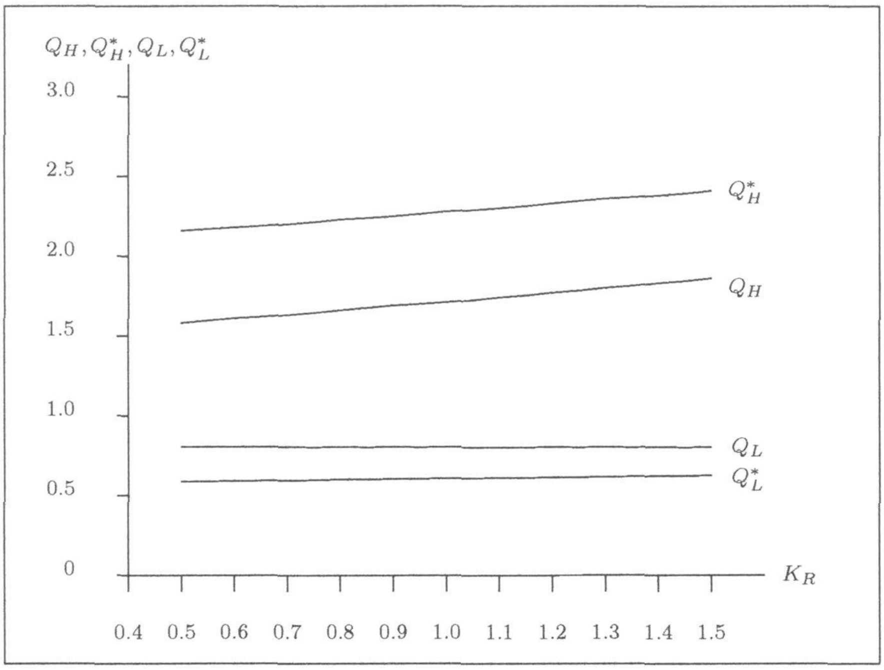

図 2.7: 投資コストの収入比例係数の変化と参入、撤退決定

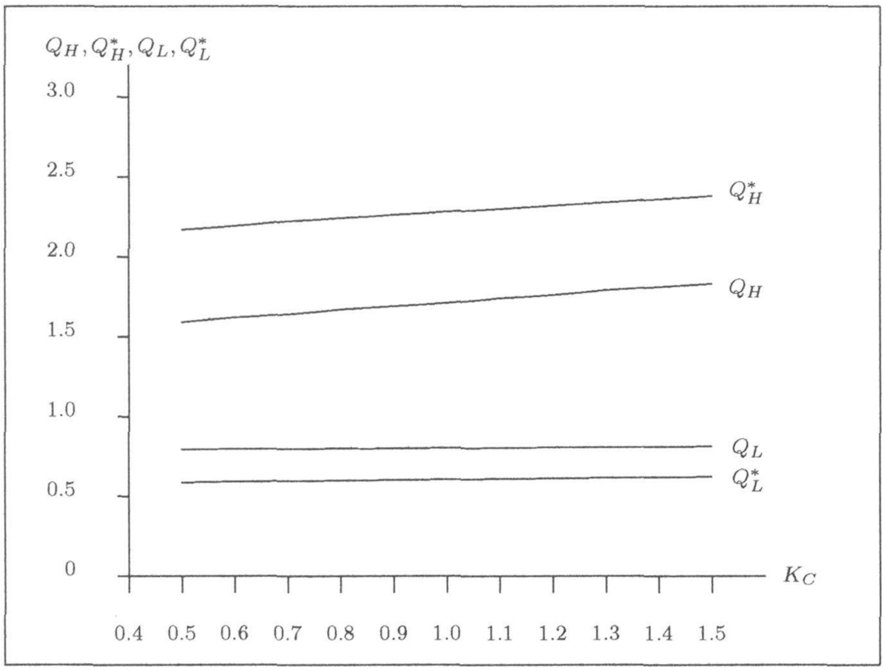

図 2.8: 投資コストの操業コスト比例係数の変化と参入、撤退決定

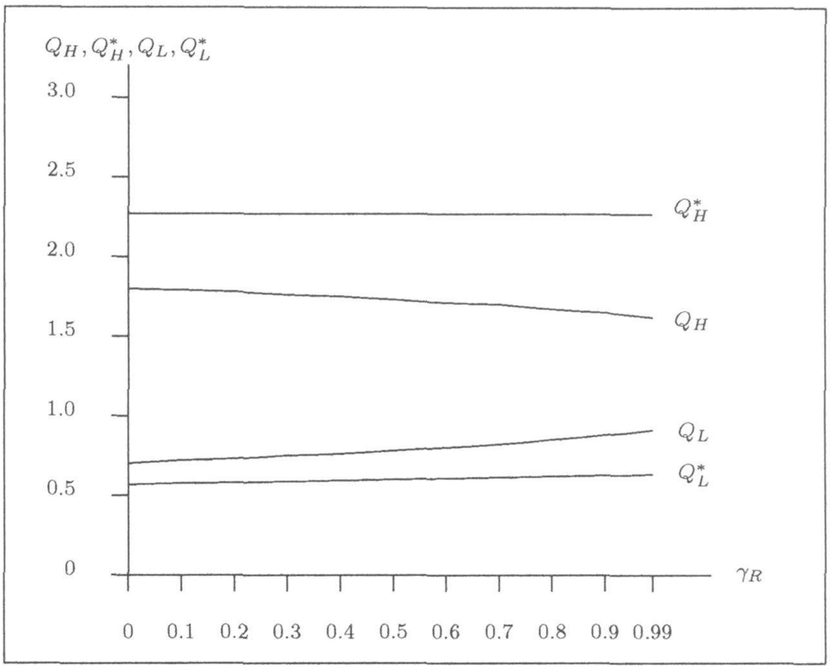

図 2.9: 残存価値の収入比例係数の変化と参入、撤退決定

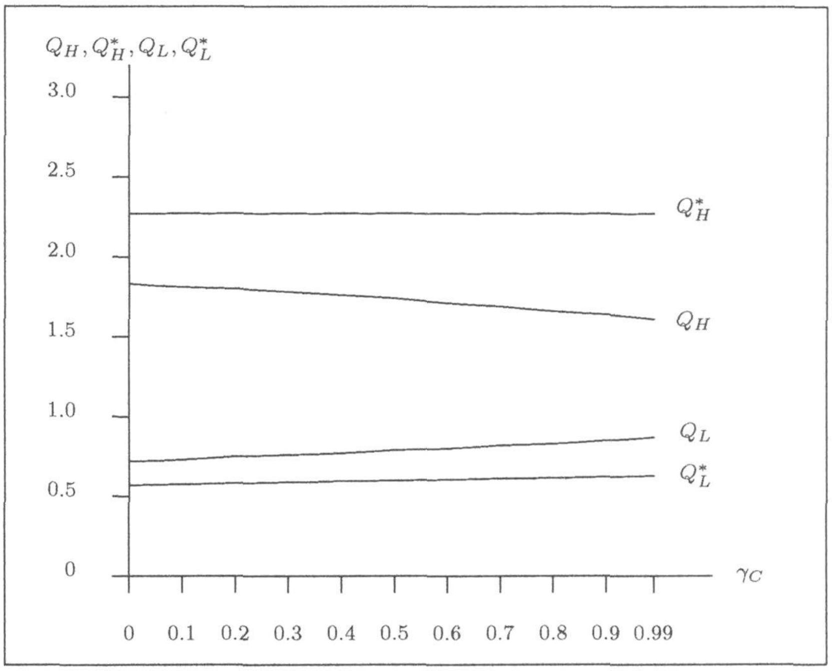

図 2.10: 残存価値の操業コスト比例係数の変化と参入、撤退決定

モデルに比較するとその影響は小さい。

2.6 結論

この章では、プロジェクトの収入と操業コストが確率的に変化し、投資コストが参入時の収入と操業コストに比例し、プロジェクトの残存価値が撤退時の収入と操業コストに比例するような状況を仮定して、参入・撤退モデルと単純な参入モデル、単純な撤退モデルで、それぞれプロジェクトの価値及び参入水準と撤退水準を分析、比較した。次に、分析の結果を数値計算で検証した。プロジェクト価値の比較はパラメータが標準的なケースについて行った。参入・撤退モデルでのプロジェクト価値は単純な参入モデルあるいは単純な撤退モデルでのプロジェクト価値のいずれよりも高いという結果を得た。これは、参入・撤退モデルの方が、より柔軟な決定を行っていることによるもので、パラメータの値が変化した場合にも結果は変わらないと考えられる。次に、各パラメータの値を変化させそれぞれのモデルでの参入の臨界値、撤退の臨界値の変化を比較した。各パラメータの値の変化がそれぞれのモデルでの参入の臨界値、撤退の臨界値に与える影響はさまざまであるが、参入・撤退モデルの参入水準は単純な参入モデルより低く、参入・撤退モデルの撤退水準は単純な撤退モデルより高い。Choi & Lee[10] のモデル、Dixit & Pindyk[18] での単純参入モデルと単純撤退モデルは、この章のスペシャルケースとなっている。

第3章　多段階意思決定過程でのプロジェクト評価

3.1　はじめに

企業がプロジェクトに投資を計画する際に、将来の市場の状況に応じて、参入したり、撤退したり、拡大あるいは縮小したり、段階的に投資を行なったりするのが企業の現実の投資行動である。このような柔軟な対応を採った時の投資プロジェクト価値の評価を行うのはリアル・オプション・アプローチである。リアル・オプション・アプローチによってプロジェクトの価値を評価する研究は近年では盛んになって、論文も数多く出され、いろいろな考え方が出てきている[1] 。将来の市場の状況が不確実的に変化するとき、プロジェクトの特性に対応した投資価値の評価方法を考える必要がある。第2章では将来製品価格と操業コストが確率的に変化する際の最適参入・撤退の条件とプロジェクトの投資価値について分析した。Schwartz and Moon[49] は段階的審査と許可が必要な新薬開発投資の評価法について議論をした。この章では多段階意思決定でのプロジェクトの評価を考える。このような特性を持つ投資機会の例は数多く存在するが、ここでは一般的に関心の高い R&D 投資とマーケティング活動についての意思決定を例に議論を進めることにする。

経済の国際化、技術進歩サイクルの短縮化によって、新しい製品開発の競争が激化し、知的所有権が強化されるなかで、R&D の成功によって企業の成長と利益拡大を得るため、多くの企業が R&D に関心を持つようになってきている。R&D はかなりリスクの高い投資である。将来成功するかどうか、いつ成功するか、またライバル企業に勝つことが出来るかどうかはすべて不確実である。R&D を実行する意思決定に際し、将来企業が採用する行動を確実的なものと考えたときのキャッシュ・フローの現在価値を基準にして判断する従来の方法では限界がある。将来企業が採用する行動の不確実性を考慮して、プロジェクトの価値を評価する方法としてリアル・オプション・アプローチが一般的になってきている。最近、バイオ等の分野では R&D による技術革新で将来市場に参入を目指す企業も数多く現れている。これらの企業は現在時点では負のキャッシュ・フローないし損失が発生しているが、それにもかかわらず、高い株価を維持している企業も少なくない。これらの企業の株価は R&D の将来の効果に

[1] Dixit and Pindyk[18] は基本理論と初期の研究をまとめた書物である。Majd and Pindyk[35], McDonald and Siegel[38] はリアル・オプションの初期的研究例に関する論文である。

対する期待に大きく依存している。したがって、R&Dの効果を正しく評価することは極めて重要なことである。一般に新しい製品が開発された後、それを商品化することにより一定の売上を得られるが、さらに広告宣伝や販売網の構築など販売拡大に関わるマーケティング活動によって新しい製品が広く消費者に受け入れるような可能性を持っている。ここで、マーケティング・コストを支出することによって将来需要が拡大の機会が存在する場合について検討してみる。

いろいろな構造を持つオプションの価値評価の手法がファイナンス理論の分野で開発されているが、リアル・オプションの場合は金融商品の場合と違って、評価の対象となる投資プロジェクト自身の特徴を考えなければならないし、そのプロジェクトが直接に市場で取引されているわけではないので、独自の評価方法を考えなければならない。ここでは、時点 0 でR&Dの意思決定を行ない、R&Dを実行したときには t 時間後に新製品の販売を開始することができるものとする。ただし、新製品の価格は確率的に変動するので、価格の状況に応じて、十分な利益が得られないときには、新製品の生産は行わない。生産を行い、新製品を販売した時には、マーケティング活動により需要が増加し、さらに生産能力を拡大する可能性が生まれる。この場合も、製品価格の動向に応じて、生産能力の拡大を行わないこともある。マーケティング活動は T 時間継続し、その後、生産能力の拡大を行うかどうかを決定する。すなわち、時点 0 で、R&D投資を行うかどうかを決定し、時点 t で、商品化のための設備投資を行うかどうか、また、マーケティング活動を行うかどうかを決定する。最後に、時点 $t+T$ で、生産能力の拡大を行うかどうかを決定する。以上を図示すれば図3.1のようになる。このように、多段階での意思決定を含むため、マーケティング活動の効果の評価は、オプションに対するオプションである複合オプション(Compound Option)の価格モデルに類似したものになるが、マーケティング活動が行われるのは、新製品の販売がある場合だけであるため、複合オプションの価格モデルとは異なるものとなる。

Dixit and Pindyck[18] はオプション理論の応用のうち、主として、参入時点あるいは退出時点を求める問題を取り扱っている。それに対し、ここでは、参入時点が予め与えられているときのプロジェクトの評価を考える。このような立場からプロジェクトの評価を考えたものには、Berk, Green and Naik[3]、Ottoo[44]、Copeland and Antikarov[12] などがある。Berkらは利子率が確率的に変動するものとして、イノベーションが連続的に発生するときの企業価値について分析しているが、多段階の意思決定モデルではない。Ottoo[44] はR&D活動とマーケティング活動を取り上げ、ここで議論するものと同じような状況を分析しているが、利用したモデルは、Black=Scholes型のオプション価格モデルで、複合オプションには触れていない。さらに、状況の分析の仕方には問題が多い。Copelandらは複合オプションや交換オプション(Exchange Option)の応用に触れているが、2項モデルを使って、複合オプションと交換オプションを説明しているだけで、意思決定プロセスの分析としては不十分である。ここでは、複合オプションの価格理論を利用しながら、プロジェクトの価値を明示的に求めることを試みる。ファイナンス理論では、リスクの評価が重要な問題となっている。しか

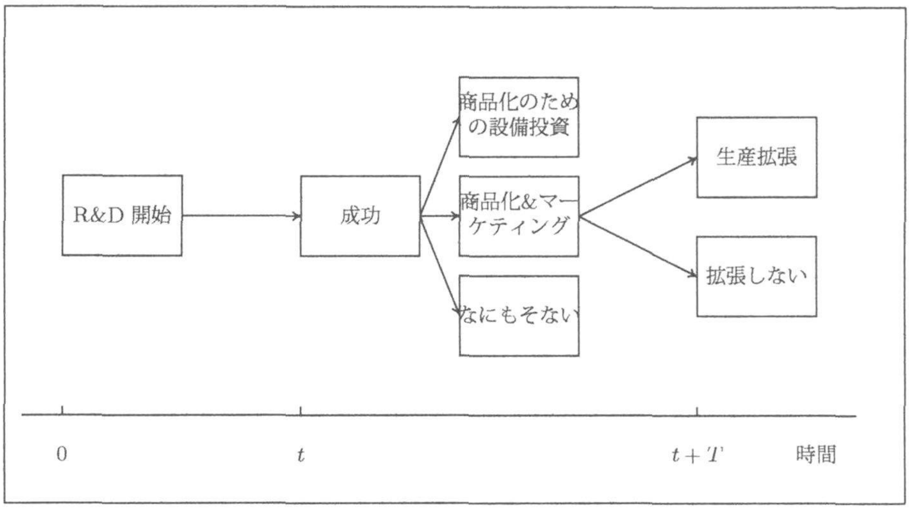

図 3.1: 商品化のための設備投資とマーケティング活動

し、ここではこの問題に直接に触れないことにし、単純にキャッシュフローの期待値の現在価値を基準にして意思決定を行うものとする。あるいはここでのキャッシュフローはリスク調整後のものであると考えてもよい[2]。

第 2 節では、R&D の期間である t を確定的な長さと仮定して基本モデルを構築する。第 3 節では、T が確率変数であり、かつ、他の企業と競争的な状況のもとでのモデルを考える。第 4 節は分析の結果をまとめる。

3.2 基本モデル

3.2.1 商品価格の不確実性と商品化価値

R&D によって開発される新しい商品の潜在的需要があって、現在直ちにこの商品を売り出すと価格が P_0 であるとする。価格は将来の経済状態によって確率的に変動し、時点 s での価格を P_s とすると、価格変動の確率微分は次の式によって表せると仮定する。

$$dP_s = \mu P_s ds + \sigma P_s dZ_s \tag{3.1}$$

ここで、μ と σ はそれぞれドリフト率とボラティリティであって、一定とする。Z_s は標準ウィーナー過程である。

企業が R&D に成功し、商品化した場合、I_1 の投資で単位時間当たり 1 単位の製品の生産能力を獲得する。追加投資を行なわない場合、単位時間当たり 1 単位の製品

[2]確率的に変化するキャッシュフローのリスク調整後の評価については飯原 [55] を参照。

の生産を安定的に継続することができるし、1単位の製品の生産にかかるコストが一定であるとする。マーケティング活動を行った場合、需要は単位当たり α 単位だけ増加する。この場合 I_2 の投資で単位時間当たりの生産能力は（$1+\alpha$）単位になる。単位時間当たり1単位の製品の生産コストを A として、1単位の生産を永遠に行なった場合、割引率 r を一定としたときのキャッシュフローの割引現在価値は次のように計算される。

$$E\left[\int_0^\infty (P_s - A)\exp(-rs)ds\right] = \frac{P_0}{r-\mu} - \frac{A}{r}$$

キャッシュフローの割引現在価値は P に依存して変化することが分かる。時点 s で商品化した場合

$$V_s = \frac{P_s}{r-\mu}$$

を商品化価値と呼ぶ。V_s の確率微分は

$$dV_s = \mu V_s ds + \sigma V_s dZ_s \tag{3.2}$$

となる。

3.2.2 商品化のための投資とマーケティング活動の意思決定

新しい製品の開発に成功すると、それを商品化して市場に売り出すか否かを決定する。新しい製品の消費量は一気に高い水準に達することは稀であるので、一般には潜在的需要に応じた量の生産を行ない、同時にマーケティング活動によって、広く消費者に受け入れられることによって、生産を拡大する。これまでのプロジェクト評価では、しばしば、実際これらの行動を採用するものと仮定して、評価を行ってきた。しかし、状況に応じて、これらの行動を採用しないほうが望ましいこともある。各時点の状況に応じて柔軟な意思決定を行うことを考慮して、プロジェクトの評価を行うことが正しい考え方である。

本章では、プロジェクトの評価式を明示的に示すため、商品化のための設備投資の決定時点と、マーケティング活動の開始時点を同一時点とした。マーケティング活動の開始は将来の拡大によるキャッシュフローの割引期待価値とマーケティング・コストを比べて行う。生産拡大は $t+T$ 時点で行うものとする。生産能力を単位時間当たり α 単位だけ拡大して永続的に生産を継続した場合のキャッシュフローの $t+T$ 時点での現在価値は

$$\alpha\left(V_{t+T} - \frac{A}{r}\right)$$

となる。

$$K_2 = \frac{\alpha A}{r} + I_2$$

とすると、生産拡張の最適意思決定の結果は

$$\max(\alpha V_{t+T'} - K_2, 0)$$

となる。マーケティング・コストをマーケティング活動開始時に評価し、その額を一定であると仮定し、B で表すことにする。マーケティング活動の開始時点から生産拡張時点までの期間を T とすると、マーケティング活動の最適意思決定の結果は

$$\mathrm{Max}[E[e^{-r'T'}\mathrm{Max}(\alpha V_{t+T'} - K_2, 0)] - B, 0]$$

となる。t 時点で R&D 活動が完了したとして、この時点で商品化のため投資決定とマーケティングの意思決定を考える。

$$K_1 = \frac{A}{r} - I_1$$

とすると、その時の最適意思決定の結果は

$$\mathrm{Max}\{V_t - K_1 + \mathrm{Max}[E[e^{-r'T'}\mathrm{Max}(\alpha V_{t+T'} - K_2, 0)] - B, 0], 0\}$$

となる。

t 時点でのキャッシュフローの現在価値を 0 時点で評価して、R&D の費用と比べて R&D を行なうべきか否かを決定する。このような意思決定は現実的であるが、今までの割引現在価値の方法には限界がある。リアル・オプション・アプローチによって、このような意思決定プロセスの評価が可能となる。次に節では、このような特殊な構造を持つ意思決定過程の評価方法を考える。

3.2.3 プロジェクトの評価

R&D 活動が完了した t 時点で、商品化のための設備投資を行うかどうかを決定する際に、V_t が K_1 を上回っていれば商品化のための設備投資を行う。この場合、$t+T$ 時点で生産を拡張しないこともありうるということを考慮しながら、生産拡張の効果を t 時点で評価したものとマーケティング・コストを比較することによって、マーケティング活動を行うかどうかを決定する。これに対し、V_t が K_1 を下回っているときには、マーケティング活動の効果も考慮した上で、商品化のための設備投資を行うかどうかを決定する必要がある。

生産拡張効果を t 時点で評価したものを $c(\alpha V_t, K_2, T)$ で表すことにする。

$$c(\alpha V_t, K_2, T) = E\{e^{-rT}\mathrm{Max}[\alpha V_{t+T} - K_2, 0]|F_t\} \tag{3.3}$$

F_t は t 時点での情報集合を示す。(3.3) 式の右辺は、通常のオプション価格モデルと同様に、

$$c(\alpha V_t, K_2, T) = e^{(\mu-r)T}\alpha V_t N(d_1) - e^{-rT}K_2 N(d_2) \tag{3.4}$$

$$d_1 = \frac{\ln(\alpha V_t/K_2) + (\mu + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}, \ d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} \tag{3.5}$$

となる。$N(\cdot)$ は標準正規分布関数である。単純な期待値を求めているため、Black = Scholes モデルとは異なるが、$\mu = r$ とすれば、Black=Scholes モデルと一致する。$c(\alpha V_t, K_2, T)$ は V_t について単調増加かつ凸の関数であるから、$c(\alpha V_t, K_2, T)$ の値が B に等しくなる V_t の値を V^* とすると V^* は一意に決まり、$V_t \geqq V^*$ のとき、$c(\alpha V_t, K_2, T) \geqq B$ である。

$V_t \geqq K_1$ のときには、マーケティングの効果を無視しても、商品化のための設備投資を行うのが適当となるので、$V^* \geqq K_1$ であれば、

- $V_t \geqq V^*$ ならば、商品化のための設備投資を行うと同時にマーケティング活動を開始する。
- $V^* \geqq V_t \geqq K_1$ ならば、商品化のための設備投資だけを実行してマーケティング活動は行わない。
- $K_1 \geqq V_t$ はならば、何も行わない。

というのが、最適決定となる。これに対して、$V^* \leqq K_1$ のときには、マーケティング活動の効果も考慮に入れて、商品化のための設備投資を実行するかどうかを判断する必要がある。

$$V_t - K_1 + c(\alpha V_t, K_2, T) - B$$

は V_t に関して単調増加かつ凸の関数であるから、この値が零になるような V_t の値を V^{**} とすると V^{**} は一意に決まる。ただし、$K_1 \geqq B$ が条件である。従って、

- $V_t \geqq V^{**}$ ならば、商品化のための設備投資を行うと同時にマーケティング活動を開始する。
- $V^{**} \geqq V_t$ ならば、何も行わない。

というのが最適決定となる。なお、$V^* \leqq K_1$ のときには、$V^* \leqq V^{**} \leqq K_1$ が成り立つ。

意思決定プロセスの効果の t 時点での評価額を G_t で表すと、$V^* \geqq K_1$ のとき、(i)$V_t \geqq V^*$ ならば $G_t = V_t - K_1 + c(\alpha V_t, K_2, T) - B$、(ii)$V^* \geqq V_t \geqq K_1$ ならば、$G_t = V_t - K_1$、(iii)$K_1 \geqq V_t$ はならば、$G_t = 0$。これを図 3.2.3 で表している。$V^* \leqq K_1$ のときには、(i) $V_t \geqq V^{**}$ ならば、$G_t = V_t - K_1 + c(\alpha V_t, K_2, T) - B$、(ii) $V^{**} \geqq V_t$ ならば、$G_t = 0$。これを図 3.2.3 で表している。

G_t の 0 時点での期待値を H で表すと、

$$H = E_0[e^{-rt} G_t] \tag{3.6}$$

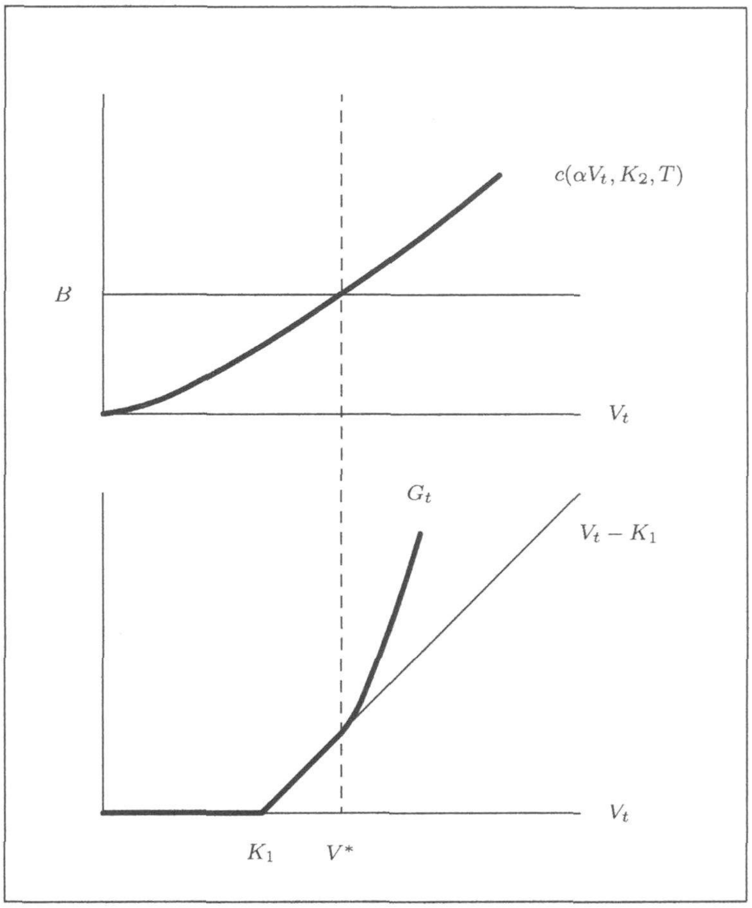

図 3.2: $V^* \geq K_1$ のときの G_t

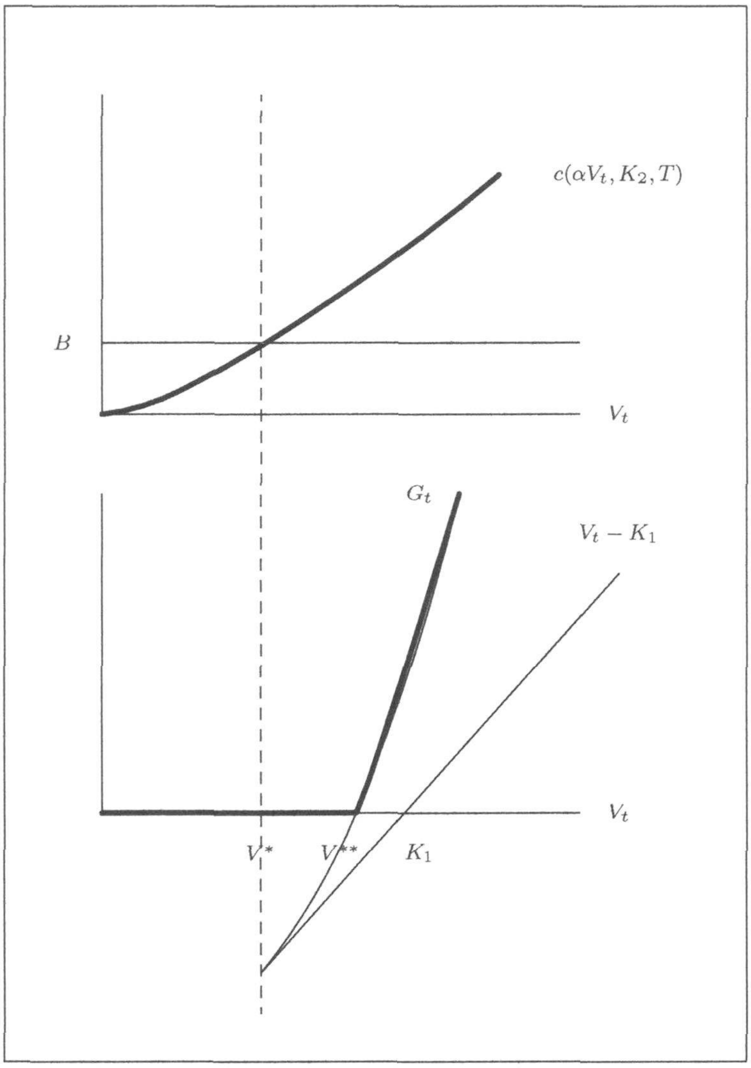

図 3.3: $V^* \leq K_1$ のときの G_t

である。$K_1 \leq V^*$ のときには

$$H = e^{(\mu-r)t}V_0N(c_1) - e^{-rt}K_1N(c_2)$$
$$+e^{(\mu-r)(t+T)}\alpha V_0M(a_1, b_1^*; \sqrt{t/(t+T)})$$
$$-e^{-r(t+T)}K_2M(a_2, b_2^*; \sqrt{t/(t+T)}) - e^{-rt}BN(b_2^*) \qquad (3.7)$$

となる。$M(x, y; \rho)$ は相関係数が ρ である 2 次元標準正規分布関数で、括弧内の変数

$$a_1 = \frac{\ln(\alpha V_0/K_2) + (\mu + \sigma^2/2)(t+T)}{\sigma\sqrt{(t+T)}},\ a_2 = a_1 - \sigma\sqrt{(t+T)} \qquad (3.8)$$

$$b_1^* = \frac{\ln(V_0/V^*) + (\mu + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}},\ b_2^* = b_1^* - \sigma\sqrt{t} \qquad (3.9)$$

$$c_1 = \frac{\ln(V_0/K_1) + (\mu + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}},\ c_2 = c_1 - \sigma\sqrt{t} \qquad (3.10)$$

である。$V^* \leq K_1$ のときには

$$H = e^{\mu-r)t}V_0N(b_1^{**}) - e^{-rt}(K_1+B)N(b_2^{**})$$
$$+e^{(\mu-r)(t+T)}\alpha V_0M(a_1, b_1^{**}; \sqrt{t/(t+T)}$$
$$-e^{-r(t+T)}K_2M(a_2, b_2^{**}; \sqrt{t/(t+T)}) \qquad (3.7')$$

となる。ここで a_1 と a_2 は (3.8) 式と同一で、

$$b_1^{**} = \frac{\ln(V_0/V^{**}) + (\mu + \sigma^2/2)t}{\sigma\sqrt{t}},\ b_2^{**} = b_1^{**} - \sigma\sqrt{t} \qquad (3.9')$$

は (3.9) 式での V* を V** に変更したものである。(3.7) と (3.7') の右辺の第 1 項と第 2 項は Black-Scholes のオプション価格モデルに対応し、第 3 項と第 4 項は複合オプション価格に対応する。$\mu= r$ であれば、(3.7) の右辺は通常のオプションの価格と複合オプションの価格の和になっている。(3.7') の右辺は権利行使価格に対応するものの一部が異なっている[3]。以下では、H を R&D 効果とよぶことにする。

3.2.4 R&D の意思決定

時点 0 での R&D を実行するかどうかを決定するために、上で R&D の効果として求めた H と R&D の費用の比較する。R&D の費用は単位時間当たり X の金額を R&D が成功するまで支出し続けるものとする。従って、R&D 費用の現在価値 J は

$$J = \frac{X}{r}(1 - e^{-rt}) \qquad (3.11)$$

[3]複合オプションの評価については Geske[20] を参照。Hull[22], Stoll and Whaley[50] など現代ファイナンスの解説書でも説明している。二次元正規分布の分布関数の近似公式 Hull[22] とおよび Stoll and Whaley [50] に紹介されているが、紹介した近似公式は若干異なる 。

表 3.1: パラメータの値

パラメータ名	値
商品価格 P_0	56
商品価格のドリフト率 μ	0.00%
商品価格のボラティリティ σ	30%
商品化のための投資額 K_1	500
割引率 r	7%
生産拡張率 α	0.5
R&D 期間 t	2
マーケティング活動期間 T	1
生産拡張のための投資額 K_2	200

表 3.2: 計算結果

項目	$B=50$	$B=150$
リアル・オプション評価値	403.6477	345.5528
NPV 評価値	379.4564	292.5206

となる。$J <$ H ならば R&D を実行し、R&D の純効果の評価額は H − J となる。R&D の支出額が予め決まっていれば、上のような形でプロジェクトが評価されることになるが、適切な R&D の支出額を決めるためには、R&D の純効果が零になるような水準（break-even point）を求め、これを基準点（bench mark）とすることが考えられる。このような水準を X^* とすると

$$X^* = \frac{rH}{1-e^{-rt}} \tag{3.12}$$

となる。X^* を臨界費用と呼ぶことにする。

3.2.5 数値計算

この節では上の節で得た (3.7)、(3.7') による評価方法について数値計算をし、それを柔軟的な投資評価を採らない伝統的ＮＰＶ評価値と比較するとともに、いくつかの商品価格のボラティリティで、R&D 期間の変化が評価額に与える影響を検証する。表 3.2.5 は各パラメータの値である。計算結果を表 3.2.5 に示した[4]。

[4] 二次元正規分布の累積確率の計算は Stoll & Whaley [50]（Appendix13.1）で紹介された分布関数の近似公式を使用した。但し、コンピュータを利用した計算では狭義の不等式を広義の不等式に変換した。

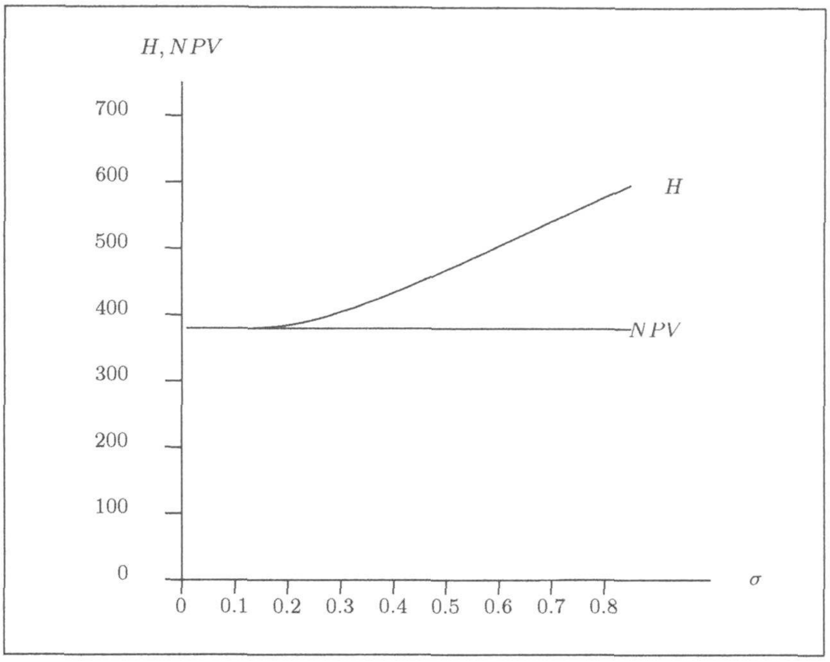

図 3.4: リアル・オプションの評価値と NPV の評価値

伝統的 NPV 評価値は次のように計算した。

$$(Ve^{\mu t} - K_1)e^{-rt} + (\alpha V e^{\mu(t+T)} - K_2)e^{-r(t+T)} - Be^{-rt} \tag{3.13}$$

表 3.2.5 から分かるように伝統的 NPV 評価値は過小評価である。これは伝統的評価法では、ありそうな意思決定を予め決め、それの現在価値を R&D 効果の評価額とするのに対し、リアル・オプション・アプローチでは状況に応じた意思決定プロセスを反映するような評価法であることによる。したがって、不確実性（ボラティリティ）が大きいほど両者の差は大きくなる。この性質を示したのは図 3.4 である。

R&D 期間についてみると、ボラティリティが小さい場合 R&D が成功するまでの時間が長くなるほど R&D の効果は下がるが、ボラティリティが大きい場合は R&D 期間の長さがある点に達するまでは R&D の効果を上げる傾向がある。これは新製品発売時点の価格の変動幅は R&D の期間が長くなれば、大きくなり、変動幅が大きいほどオプションの価格が大きくなることによる。しかし、R&D 期間がさらに長くなると割引要因が影響するので、R&D の効果が下がる。これを示したのは図 3.5 である。

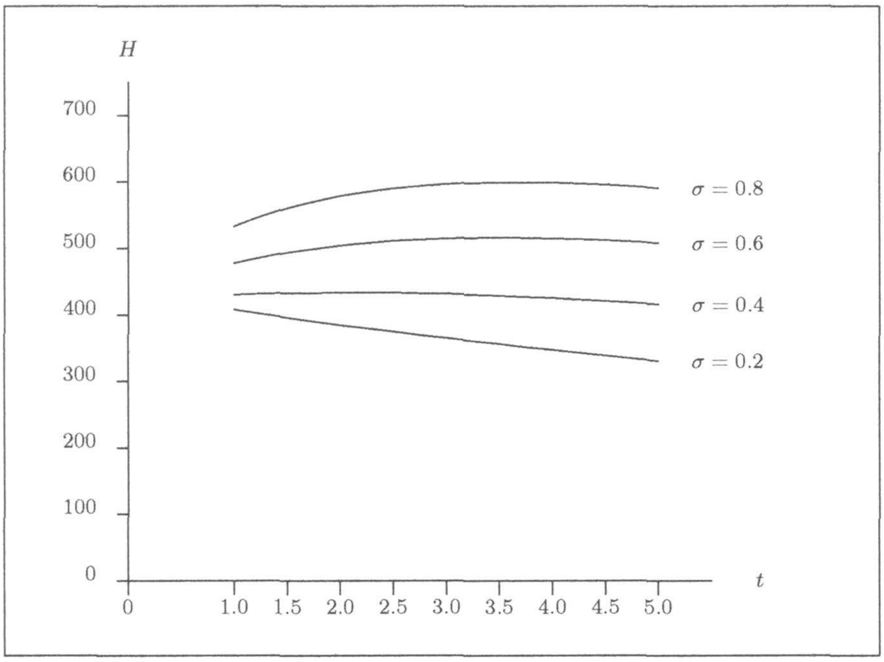

図 3.5: R&D の期間の変化と R&D の効果の変化

3.3　新製品開発競争

前節ではモデルを分かりやすくするため、R&D 期間を一定と仮定して基本的な評価方法を議論した。この節では R&D 期間を確率変数と考え、さらに競争的な環境を想定した場合の R&D 効果の評価について議論する。

3.3.1　競争の環境

同一の製品に多数の競争相手が開発競争を行っている場合、最初の成功者が特許によって商品化の権利が保護されるのが一般的になっている。従って、他社に先駆けて開発に成功することがポイントとなる。ここでは、R&D 成功までの時間の確率分布がパラメータ λ の指数分布に従うと仮定する。ここでの議論は企業 1 と企業 2 の 2 つの企業が同一の製品について競争する場合に限定するが、それ以上の競争相手がいる場合でも類似の議論が出来る。

企業 1 と企業 2 のパラメータを λ_1 と λ_2 とし、それぞれの企業だけが単独に R&D を行った場合 R&D の成功時刻を τ_1 と τ_2 とする。τ_1 と τ_2 が互いに独立であれば、時

刻 t までに企業1が企業2より早くR&Dに成功する確率は

$$Pr\{\tau_1 < \tau_2 \text{and} \tau_1 < t\} = \int_0^t e^{-\lambda_2 s}\lambda_1 e^{-\lambda_1 s} ds \tag{3.14}$$
$$= \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}\left(1-e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\right)$$

となる。

3.3.2 意思決定

ここでのR&D成功時刻 t は確率的に変動するので、前節で求めた t 時点でR&Dに成功した場合のR&D効果の期待価値 H を、改めて $H(t)$ と表すと、企業1のR&D効果の期待価値は

$$\hat{H} = \int_0^\infty H(t)\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt \tag{3.15}$$

となる。自社あるいはライバル企業のいずれかが開発に成功するまで単位時間当たり X のR&D費用を支出するものとすると、自社の支出するR&D費用の期待値は次のようになる。

$$\hat{I} = \int_0^\infty (\lambda_1+\lambda_2)e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t}\int_0^t Xe^{-rs} ds dt = \frac{X}{\lambda_1+\lambda_2+r} \tag{3.16}$$

従って、

$$\hat{H} - \hat{I} \geq 0$$

のときR&Dが実行される。単位時間当たりR&Dの臨界費用は

$$X^* = (\lambda_1+\lambda_2+r)\hat{H} \tag{3.17}$$

となる。

3.3.3 数値分析

以上では競争的状況での将来柔軟的な対応を採った時、R&D効果の期待価値の計算、R&Dの期待費用との比較でのR&D投資の意思決定、単位時間当たりのR&Dの臨界費用について議論した。このような競争条件が与えられたとき、企業の対応を分析してみたい。ここでは、企業のR&D能力を表すパラメータ λ_1 と λ_2 以外の変数が与えられた時、自社あるいはライバル企業のR&D能力の変化が X^* と $\hat{H}$ に及ぼす影響を調べてみる。しかし、これは解析的に議論することは困難であるので、数値計算によって分析する。

表 3.3: 計算の結果 ($B = 50, \lambda_1 = 0.25, \lambda_2 = 0.10$)

t	$H(t)$	$dPr * \Delta t$	$H(t) * dPr * \Delta t$
0.25	429.5411	0.114527	49.19424
0.75	418.4282	0.096141	40.22802
1.25	406.1668	0.080706	33.21334
...	...	...	...
...	...	...	...
...	...	...	...
21.75	159.9981	6.18-E05	0.009885
22.25	155.4171	5.19-E05	0.008060
22.75	150.9948	4.35-E05	0.006572
合計		0.713147	280.9679

まず、λ_1 と λ_2 以外が一定の場合について、競争的状況での R&D 効果の期待価値である (3.15) 式の値を計算するために、数値例として、時間 t の刻みを 0.5 単位とし、各刻みの中心となる時点での R&D 効果の $H(t)$ を計算して、その時間刻み内の成功確率を掛けて合計をとる。計算の結果を示したのは表 3.3.3 である。

この方法は、計算の効率と精度が問題となる。時刻 t が 20 以上となると、各時間刻み内の成功確率と $H(t)$ を掛けたものが無視できるほど小さくなるので、ここでの合計の範囲を 22.75 までとした。精度を上げる方法として、時間の刻みを細かくし、期間を延長することである。刻みをさらに細かくし、期間を延長して計算すると H の値は 281.42 となるが、計算量が膨大になる。

上の計算の仕方に代わるものとして、企業 1 が企業 2 よりも早く R&D に成功するという条件の下での開発時間の期待値

$$E[t|t < \infty] = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{\lambda_1} \int_0^\infty t\lambda_1 e^{-(\lambda_1+\lambda_2)t} dt = \frac{1}{\lambda_1 + \lambda_2} \tag{3.18}$$

を t^* とし、$H(t^*)$ に企業 1 が企業 2 より早く R&D に成功確率

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_1 + \lambda_2}$$

をかけることにより、R&D 効果の近似値を求めるという方法が考えられる。この方法で計算すると図 3.5 の曲線が直線に近ければ、正確な値に近い値が得られる。図 3.5 の曲線が凹であれば、Jensen の不等式から予想されるように、この方法で求めた近似値は過大評価になる。ボラティリティが大きくなるにつれ誤差が大きくなる。これを示したのは図 3.6 である。

2 つの計算方法についてみると、1 つ目の方法では刻みを小さくすると計算量が膨大になるわりには精度が大きく変わらないので、少々刻みが荒くても、正確な結果に近

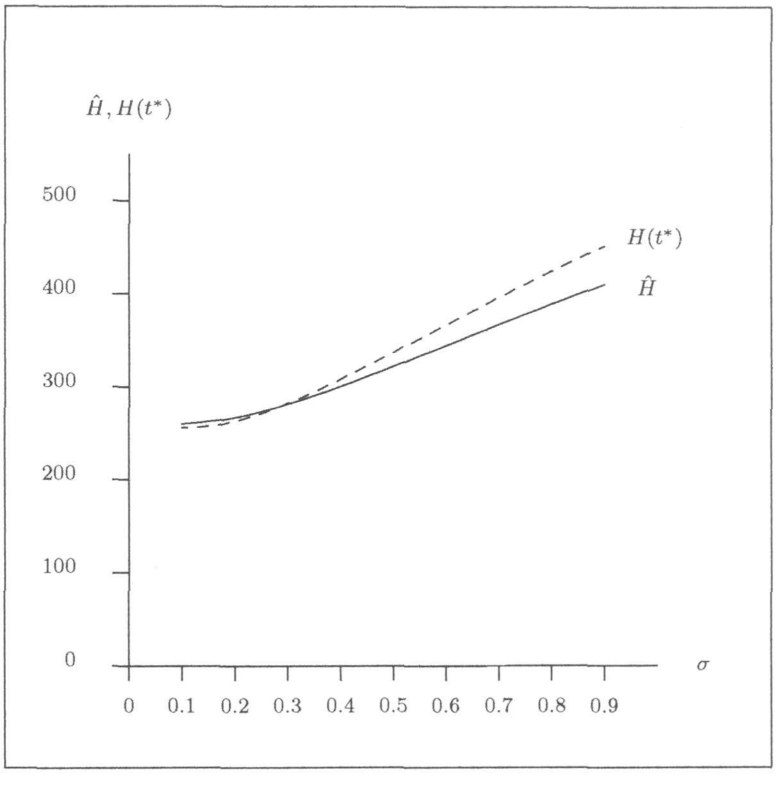
$\hat{H}, H(t^*)$
500
400
300
200
100
0
$H(t^*)$
$\hat{H}$
σ
0 0.1 0.2 0.3 0.4 0.5 0.6 0.7 0.8 0.9

図 3.6: 近似計算の誤差

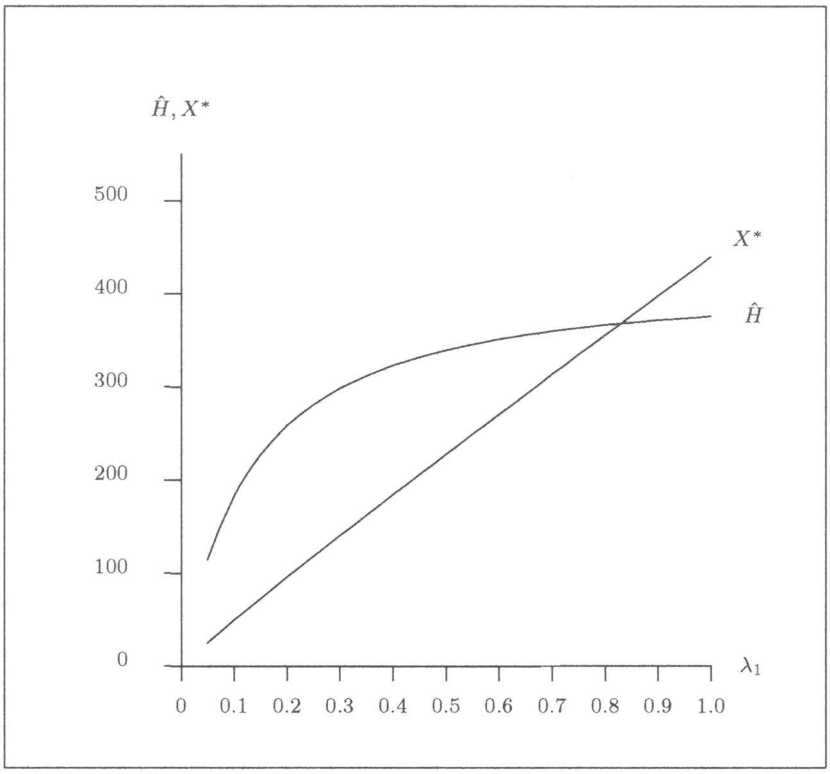

図 3.7: λ_1 の変化による企業 1 の R&D 効果の期待値と臨界費用の変化

い数値が得られる。2つ目の方法では、計算は簡単であるが、ボラティリティが大きい場合誤差が大きいので、この点について注意する必要がある。ここでは、表 3.3.3 で表した計算方式を用いて λ_1 あるいは λ_2 のどちか一方が変化した時に企業 1 の R&D 効果の期待価値と R&D に単位時間当たり支出する臨界費用の変化を調べて、図 3.7 と図 3.8 で示した。

λ_1 の増大は企業 1 の期待成功時刻を短縮させるので、単位時間当たりの臨界費用はほっぼ比例して増大する。一方 R&D 効果の期待価値は λ_1 が無限大で、すなわち直ちに R&D に成功したとしても、R&D の効果が

$$\mathrm{Max}\{V_0 - K_1 + \mathrm{Max}[c(\alpha V_0, K_2, T) - B, 0], 0\}$$

を超えることはない。したがって、競争相手の研究開発の能力が変化しない場合、極力に自社の研究開発の能力を上げる必要はない。

λ_2 の増大は企業 1 の成功確率を減少させるので、R&D 効果の期待価値が減少する。λ_2 が無限大になるにつれ、企業 1 の R&D 効果の期待価値が 0 に近付く。一方期待成功時刻に対して影響が小さいため、単位時間当たり費用の最大額があまり変化しない。

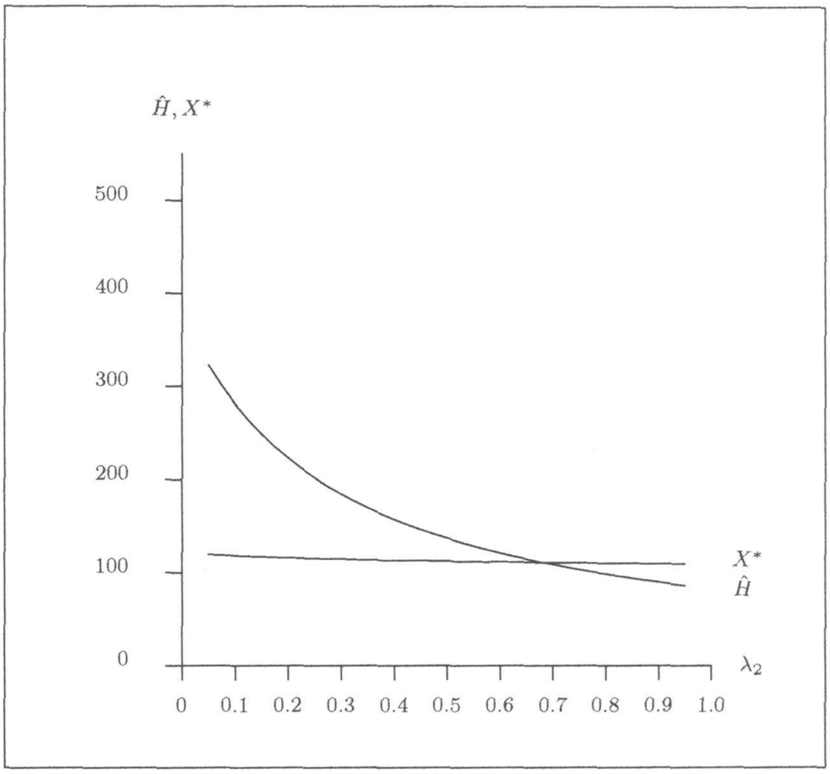

図 3.8: λ_2 の変化による企業 1 の R&D 効果の期待値と臨界費用の変化

3.4 結論

本章は、R&Dが成功のときに生産を開始し、その後、マーケティング活動により、さらに生産規模を拡大する可能性がある場合のプロジェクトの価値をリアル・オプション・アプローチによって求めることを試みた。基本モデルではR&Dの成功までの期間が確定的である場合について分析した。マーケティング・コストが十分に大きいときには、マーケティング活動を実行するために、時点 t での商品化価値の V^* が設備投資額 K_1 より大きくなり、設備投資の決定を行った後にマーケティング活動を行うかどうかを決定できる。このため、R&Dの効果は商品化のための投資額 K_1 を行使価格とする単純なオプション価値と、マーケティング・コストをオプション・プレミアムとした複合オプションの価値の和となる。これに対して、マーケティング・コストが小さいとき、設備投資の決定はマーケティング活動の効果を考慮して行う必要がある。このため、R&D効果は単純なオプションと複合オプションの和の形にはならない。このような形の評価式は二次元正規分布の確率分布関数を利用すれば容易に計算できて、プロジェクトのスタート時点での適切な意思決定に役立つ。モデルの展開として、競争的状況を考え、R&Dの成功時点を確率変数としたときのプロジェクトの評価を議論した。R&D効果の評価式を求め、さらに、自社あるいはライバル企業の競争能力が変化したときのR&D効果の変化を数値分析した。この場合の評価式の計算には時間を要するので、計算効率を考慮して近時計算を考えた。

第4章　確率的利子率でのプロジェクト評価

4.1　はじめに

プロジェクトへ投資を実行する際、プロジェクトから発生するキャッシュフローの価値と投資コストを比べることによって投資するかどうかを決定する。投資実行時には投資コストは明らかになるが、プロジェクトからの将来のキャッシュフローは直接に観察できない。将来のキャッシュフローは確定的なものではなく、確率的に変動するものと考えられる。確率的に変動するキャッシュフローを評価する際、リスクの調整は勿論問題となるが、適切な割引率を用いるのも重要な意味を持っている。これまでの議論では、多くの場合、対象となる問題点を明快にするため、あるいはモデルを扱いやすくするために、割引率を確定的なものと仮定している。これに対して、この論文では、割引率が確率的に変動する場合のキャッシュフローの評価を考える。

適切な割引率が既知で、かつそれが時間に関して一定な値 r であれば、時刻 t で発生したキャッシュフロー C_t の 0 時点での価値は $\exp(-rt)C_t$ となる。C_t の変動をどのように評価するかが問題となるが、ここでは、C_t のリスクの評価には触れないことにし、キャッシュフローがリスクを考慮した後のものとすれば、上の値の期待値 $\exp(-rt)E_0[C_t]$ がキャッシュフローの評価値となる[1]。また、キャッシュフローがリスク考慮後のものであるので、無リスク金利ないし利子率が適切な割引率となる。無リスク金利ないし利子率が時間の確定的な関数 $r(t)$ であるときには、割引因子 $\exp(-rt)$ は

$$\exp\left(-\int_0^t r(\tau)d\tau\right)$$

となって、時刻 t でのキャッシュフローの時刻 0 での価値は

$$\exp\left(-\int_0^t r(\tau)d\tau\right)E_0[C_t]$$

となる。これに対しこの章では、利子率が確率的に変動するときのキャッシュフローの評価について考え、時刻 t でのリスク修正後キャッシュフロー C_t の時刻 0 での価値が

$$E_0\left[\exp\left(\int_0^t r_\tau d\tau\right)C_t\right]$$

[1]キャッシュフローのリスクの修正については Cochrane[11]、飯原 [55] を参照。

となるときのプロジェクトの評価を考える。

プロジェクトへの投資はすぐに実行できるものではなく、投資を実行するまでの準備段階が必要である。一般に研究開発やテスト・プラント運営などの準備を経てからプロジェクトへの投資が可能となる。準備段階にはある程度の時間を要するので、プロジェクト実行時点で状況が変化し、プロジェクトを実行しない方が良いことになるかもしれない。今現在で、プロジェクトの準備に着手するかどうかを決定するためには、プロジェクトの実行時点で、プロジェクトを実行したときに得られるキャッシュフローを評価したものから投資コストを差し引いたものがプラスのときだけを考慮して、それを現在時点で評価したものと準備費用を比べることが必要となる。プロジェクトの準備段階でのプロジェクトの評価はリアル・オプション・アプローチによって議論されてきたが、そこでは、利子率を一定と仮定する場合が多い[2]。Berk etc.[3] では将来実行する可能性のあるプロジェクトの評価について確率的に変動する利子率を用いているが、離散時間モデルで議論し、将来、次々に投資機会が発生するときの企業価値を求めることに重点をおいて、キャッシュフローについては、やや特殊な仮定をおいている。そこで、この章では、連続時間モデルを使用して、キャッシュフローの変動が対数正規分布で表現でき、利子率が確率的に変動する場合のリアル・オプション・アプローチによるプロジェクトの評価を試みる。

この章は次のように構成される。第2節では、プロジェクトの投資実行時におけるプロジェクトの評価を考える。第3節では、プロジェクトの準備段階でのプロジェクトの評価を考える。第4節では、数値計算を用いて議論する。最後に、結論を述べる。

4.2 プロジェクトの投資実行時の評価

時刻 t で、投資コスト I_t を支出してプロジェクトを実行することにより、時刻 t から時刻 $t+T$ まで、連続的にキャッシュフローが発生するものとする。プロジェクトが存続する期間中に発生するキャッシュフローは、一定のドリフト μ とボラティリティ σ_c をもって変動する幾何ブラウン運動に従うと仮定し、その変動が

$$dC_\tau = \mu C_\tau d\tau + \sigma_c C_\tau dW_c \tag{4.1}$$

と表すことができるものとする。W_c はウイーナー過程である。

利子率の確率的変動についてはファイナンス理論では数多くのモデルが考案されているが、ここではもっとも解析に容易なものとして Vasicek[54] モデルを用いる。Vasicek モデルでは利子率の変動が

$$dr_t = a(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r dW_r \tag{4.2}$$

[2]例として Dixit and Pindyck[18]、McDonald and Siegel[38] が上げられる。

と表現される。ここで、a、$\bar{r}$ と σ_r は定数で、W_r はウイーナー過程で、

$$\sigma_c dW_c \sigma_r dW_r = \sigma_{cr} dt$$

であるとする。

Vasicek モデルでは、利子率は速度 $a(a > 0)$ で $\bar{r}$ に近づいて行くトレンドを持ちながら、正規分布に従うランダム項をもって変化する。利子率の変動が線形確率微分方程式によって与えられているので、ある時点の情報のもとで、将来時点での利子率の確率分布は比較的に容易に計算することができる。時刻 t での利子率 r_t が与えられたとすると、s 時間後の利子率の確率分布は

$$r_{t+s} = r_t \exp(-as) + \bar{r}(1 - \exp(-as)) + \sigma_r \int_t^{t+s} \exp(-a(t+s-\tau)) dW_r \qquad (4.3)$$

で与えられる。(2) 式を危険中立的確率測度の下での変動と考えれば、時刻 $t+s$ で 1 単位の金額が支払われる割引債の t 時点の価格 $P(r_t, s)$ は、

$$P(r_t, s) = E_t \left[\exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau \right) \right] \qquad (4.4)$$

となる。Vasicek モデルの割引債の価格は次の命題によって与えられる。

命題 1 利子率の変動が *Vasicek* モデル *(4.2)* 式に従うとすると、時刻 t で、満期までの期間が s の割引債の価格 $P(r_t, s)$ は

$$P(r_t, s) = E_t \left[\exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau \right) \right] = \exp[-B(s) r_t + A(s)] \qquad (4.5)$$

となる。ただし、

$$B(s) = \frac{1 - \exp(-as)}{a}, \; A(s) = -\left(\bar{r} - \frac{\sigma_r^2}{2a^2} \right) [s - B(s)] - \frac{\sigma_r^2 [B(s)]^2}{4a} \qquad (4.6)$$

である。　（証明略）[3]

$B(s)$ は a を利率とする年金現価率で、$a > 0$ ならば、$B(s) > 0$ となる。

次にプロジェクトから発生する将来のキャッシュフローの価値を考える。

命題 2 キャッシュフローの変動が *(4.1)* 式、利子率の変動が *(4.2)* 式に従うとすれば、時刻 $t+s$ で発生するキャッシュフロー C_{t+s} の時刻 t での期待値は

$$E_t \left[\exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau \right) C_{t+s} \right] = C_t F(r_t, s) \qquad (4.7)$$

[3] Vasicek モデルの割引債価格については、Bjork[4]、Hull[22] などを参照。

となる。ただし、

$$F(r_t, s) = \exp\left\{\mu s - \frac{\sigma_{cr}}{a}[s - B(s)]\right\} P(r_t, s) \tag{4.8}$$

である。

証明 幾何ブラン運動の性質から、

$$C_{t+s} = C_t \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma_c^2}{2}\right) s + \sigma_c \int_t^{t+s} dW_c\right] \tag{4.9}$$

である。(4.3) 式から、

$$\begin{aligned} & -\int_t^{t+s} r\tau d\tau \\ & = -r_t \frac{1-\exp(-as)}{a} - \bar{r}\left(s - \frac{1-\exp(-as)}{a}\right) \\ & \quad -\sigma_r \int_t^{t+s} \frac{1-\exp(-a(t+s-\tau))}{a} dW_r \end{aligned} \tag{4.10}$$

である。(4.9) 式と (4.10) 式から、

$$\begin{aligned} & \exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau\right) C_{t+s} \\ = \quad & C_t \exp[-r_t \frac{1-\exp(-as)}{a} - \bar{r}\left(s - \frac{1-exp(-as)}{a}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma c^2}{2}\right) s \\ & -\sigma_r \int_t^{t+s} \frac{1-\exp(-a(t+s-\tau))}{a} dW_r + \sigma_c \int_t^{t+s} dW_c] \end{aligned} \tag{4.11}$$

となる。(4.11) 式の確率変数項

$$-\sigma_r \int_t^{t+s} \frac{1-\exp(-a(t+s-\tau))}{a} dW_r + \sigma_c \int_t^{t+s} dW_c$$

は正規分布に従う確率変数の和であるから、その平均は 0 で、分散は

$$\begin{aligned} & \sigma_r^2 \int_t^{t+s} \left[\frac{1-\exp(-a(t+s-\tau))}{a}\right]^2 d\tau \\ & -2\sigma_{cr} \int_t^{t+s} \frac{1-\exp(-a(t+s-\tau))}{a} d\tau + \sigma_c^2 \int_t^{t+s} d\tau \end{aligned}$$

である。正規確率変数 x の平均が μ_x、分散が σ_x^2 であるとき、$E[\exp(x)] = \exp(\mu_x + \sigma_x^2/2)$ であるので、

$$E_t\left[\exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau\right) C_{t+s}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= C_t \exp\left[-r_t \frac{1-\exp(-as)}{a} - \bar{r}\left(s - \frac{1-exp(-as)}{a}\right) + \left(\mu - \frac{\sigma c^2}{2}\right)s\right] \\
&\quad \times \exp\left[\frac{\sigma_r^2}{2}\left(\frac{s}{a^2} - \frac{2(1-\exp(-as))}{a^3} + \frac{1-\exp(-2as)}{2a^3}\right)\right] \\
&\quad \times \exp\left[-\sigma_{cr}\left(\frac{s}{a} - \frac{1-\exp(-as)}{a^2}\right) + \frac{\sigma_c^2}{2}s\right]
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

である。これを整理し、(4.5) 式を利用すると、(4.7) 式を得る。(証明終)

$C_t \exp(\mu s - \sigma_{cr}(s - B(s))/a)$ は $t+s$ 時点のキャッシュフロー C_{t+s} の t 時点でのリスク修正後の期待値と考えられる。これを t 時点で満期 s の債券価格 $P(r_t)$ を使って評価したものが $C_t F(r_t, s)$ である。

プロジェクトを t 時点で実施し、T 期間操業し続けた場合のキャッシュフローの t 時点での価値を U_t とすると、

$$
U_t = C_t \int_0^T F(r_t, s) ds \tag{4.13}
$$

となる。

4.3 プロジェクトの準備段階での評価

現在時点を 0 とし、t 時刻後にプロジェクトの実行が可能となり、そのときの状況によってプロジェクトを実施するかどうかを決定するものとする。t 時点でのプロジェクトからのキャッシュフローの価値を U_t、投資コストを I_t とすると、U_t が I_t を上回った場合のみプロジェクトが実施される。このような意思決定の下でのプロジェクトの 0 時点での価値 V は、

$$
V = E_0\left[\exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau\right)\max(U_t - I_t, 0)\right] \tag{4.14}
$$

となる。

投資コスト I_t は確定値あるいは確率変数として考えられるが、便宜上、投資コストは投資時点のキャッシュフローと比例関係にあると仮定し、投資コスト I_t は γC_t と等しいとする。このとき (4.14) 式は

$$
V = E_0\left[\exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau\right) C_t \max\left(\int_0^T F(r_t, s) ds - \gamma, 0\right)\right] \tag{4.15}
$$

と書くことができる。以下では、この場合について分析してみる。

割引債の価格が利子率の単調減少関数であることから、方程式

$$
\int_0^T F(r^*, s) ds = \gamma \tag{4.16}
$$

を満たすような r^* は一意的に決まり [4]、すべての $s(0 < s \leq T)$ について、$r_t < r^*$ であれば、$P(r_t, s) > P(r^*, s)$ が成立ち、$r_t \geq r^*$ であれば、$P(r_t, s) \leq P(r^*, s)$ となるので、(4.15) 式は

$$V = \int_0^T E_0 \left[\exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau \right) C_t \max\left(F(r_t, s)ds - F(r^*, s), 0 \right) \right] ds \tag{4.17}$$

と表わせる [5]。(4.17) 式右辺の被積分関数を Q_s とすると、Q_s について次の命題が成立する。

命題 3

$$Q_s = E_0 \left[\exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau \right) C_t \max\left(F(r_t, s)ds - F(r^*, s), 0 \right) \right] \tag{4.18}$$

とすると、

$$Q_s = C_0[F(r_0, t+s)N(d) - F(r_0, t)F(r^*, s)N(d - \sigma(t, s))] \tag{4.19}$$

となる。ここで、

$$d = \{\ln[F(r_0), t+s)] - \ln[F(r_0, t)F(r^*, s)] + \sigma^2(t, s)/2\}/\sigma(t, s) \tag{4.20}$$

$$\sigma^2(t, s) = \sigma_r^2(B(s))^2(1 - \exp(-2at))/2a$$

である。$N(\cdot)$ は標準正規分布の分布関数を表す。

補題 1 2変数の対数正規変数 X と Y について、

$$E[\max(X - Y, 0)] = E[X]N(h) - E[Y]N(h - \Sigma)$$

$$h = (\ln(E[X]) - \ln(E[Y]) + \Sigma^2/2)/\Sigma$$

$$\Sigma^2 = \mathrm{var}(\ln X - \ln Y)$$

が成り立つこと（証明は付録）。

証明 (4.18) 式の指数関数項、C_t、$F(r_t, s)$ はいずれも対数正規変数であるので、補題1を利用する。

$$X = \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau \right) C_t F(r_t, s)$$

$$Y = \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau \right) C_t F(r^*, s)$$

[4] $\int_0^T F(0, s)ds > \gamma$ であれば、r^* は存在する。

[5] 詳細な議論については Jamshidian[24] を参照。

とすると、(4.7) 式から、

$$E[Y] = C_0 F(r_0, t) F(r^*, s) \tag{4.21}$$

となり、(4.7) 式と期待値の性質から、

$$\begin{aligned} E[X] &= E_0 \left\{ \exp\left(-\int_0^t r_\tau d\tau \right) E_t \left[\exp\left(-\int_t^{t+s} r_\tau d\tau \right) C_{t+s} \right] \right\} \\ &= E_0 \left[\exp\left(-\int_0^{t+s} r_\tau d\tau \right) C_{t+s} \right] = C_0 F(r_0, t+s) \end{aligned} \tag{4.22}$$

となる。また、(4.7) 式と (4.5) 式から

$$\ln(X/Y) = \sigma_r B(s)(r_t - r^*)$$

であり、(4.3) 式から

$$\Sigma^2 = \mathrm{var}(\ln X - \ln Y) = \sigma_r^2 (B(s))^2 (1 - \exp(-2a))/2a \tag{4.23}$$

となる。(証明終)

プロジェクトの 0 時点での価値は、(4.19) 式を積分することにより、

$$V = C_0 \int_t^{t+T} [F(r_0, t+s) N(d) - F(r_0, t) F(r^*, s) N(d - \sigma(t, s))] ds \tag{4.24}$$

となる。$\mu = 0$、$\sigma_{cr} = 0$ のときには、$F(r, t)$ は満期 t の債券価格 $P(r, t)$ になる。このとき、(4.19) 式の右辺の括弧の中は、満期時点が $t + s$ の債券にたいする行使価格 $F(r^*, s)$、満期 t のコール・オプションの価格となっている[6] 。さらに、この場合、(4.24) の V は単位時間当たり C_0 のクーポンを T 期間支払い、満期時には償還金の支払いのないクーポン債にたいする行使価格 $I = \gamma C_0$、満期 t のコール・オプションの価格と考えられる[7] 。

4.4 数値計算による分析

この節では、数値計算を用いて、上の議論で得た結果を検証する。基準のケースで用いる各パラメータの値は表 4.4 の通りである。(4.24) 式の積分の代わりに、半期間ずつ Q_s を計算し、これを合計する形の近似計算を行った。近似計算の結果、準備段階でのプロジェクトの価値は 1.014462 となる。

確率的利子率を使用したモデルでは、債券価格ないし利子率の期間構造 (term structure of interest rate) を使用して、(4.2) 式のパラメータ $\bar{r}$、a、σ_r を推定しているが、ここでの数値計算は、これらのパラメータを与えて債券価格を求め、それを基礎にし

[6] 債券オプションの価格については、Bjork[4]、Hull[22] などを参照。
[7] この議論については、Berk etc.[3] を参照。

表 4.1: 基本ケースでのパラメータの値

パラメータ名	値
無危険利子率の平均値 $\bar{r}$	7%
平均回帰速度 a	5%
無危険利子率の標準偏差 σ	0.2%
0 時点での無危険利子率 r_0	5%
キャッシュフローのドリフト率 μ	0
0 時点でのキャッシュフロー率 C_0	1
キャッシュフローと無危険利子率の共分散 σ_{cr}	0
プロジェクトの実行までの期間 t	2
投資コストのキャッシュフロー倍率 γ	15
プロジェクトの継続期間数 T	50

表 4.2: プロジェクトを実施するまでの期間の変化によるプロジェクト価値の変化

プロジェクトを実施するまでの期間	オプション計算によるプロジェクトの価値	プロジェクトの割引現在価値	両者の差
2	1,014462	1.014403	0.000059
3	0.863668	0.862729	0.000941
4	0.733028	0.728977	0.004051
5	0.621366	0.611312	0.010054

てプロジェクトの評価を行った。従来の伝統的な正味現在価値計算で一定の割引率を使用しているが、ここで考えたようにリスク修正後のキャッシュフローを考える場合には、割引率は無リスク金利を使用すべきであり、さらに金利が変動しているならば、割引債の価格を割引計算に使用すべきであろう。そこで、表 4.4 のパラメータを使って計算した債券価格が現実の債券の価格であると仮定して、将来のキャッシュフローの期待値 $C_0\exp(\mu\tau)$ と投資コストの期待値 $\gamma C_0\exp(\mu\tau)$ について債券価格 $P(r_0)$ を使って評価すると、プロジェクトの現在価値は 1.014403 となり、先の結果とほとんど変わらない値になる。この結果は、リアル・オプション・アプローチが従来の伝統的な正味現在価値計算の結果とかなり異なる結果をもたらすというこれまでの議論と矛盾するが、これは投資コストが投資実行時のキャッシュフローに比例するという仮定によるものと考えられる。限られたケースについての分析ではあるが、いくつかのパラメータについて検討した結果は以下に示すようにいずれも両者に大きな差は生じなかった。

プロジェクトを実施するまでの期間が長くなる場合、オプション計算によるプロジェクトの価値と割引現在価値がどう変化するかを示したのが表 4.4 である。表 4.4 から明らかのようにプロジェクトを実施するまでの期間が長くなるほど、プロジェクトの

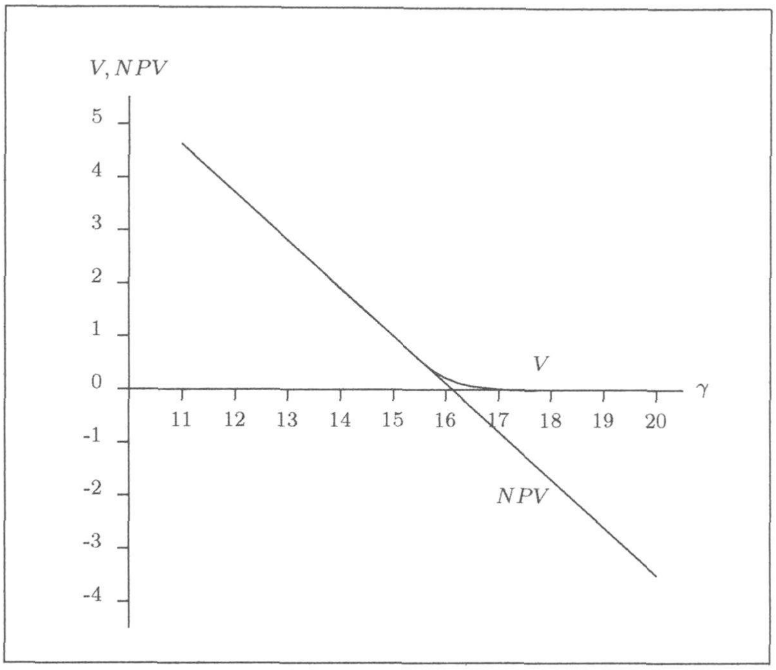

図 4.1: 投資コストとプロジェクトの価値

価値は下がり、両者の差は拡大するが、その大きさはそれほど大きくない。

投資コストのキャッシュフロー倍率γが変化したときに、オプション計算によるプロジェクトの価値と現在価値法によるプロジェクトの価値にどのような関係が見られるかを示したのが図 4.1 である。アト・ザ・マネーでオプションの時間価値が最大になると同様に、現在価値が零の点で両者の差が最大になる。

0 時点での利子率がプロジェクトの価値に与える影響を示したのが図 4.2 である。この場合もオプション評価によるプロジェクトの価値と現在価値法で評価したプロジェクトの価値の差は小さいものである。

以上の議論から確率的な利子率を利用してプロジェクトの価値を計算する際、(4.24) 式のような形でオプション価値を計算しなくても、割引債の価格を利用して現在価値を計算すればプロジェクトの近似的な評価となる。相違点は現在価値の計算ではプロジェクトの価値がマイナスと評価される可能性を持っていることである。

4.5 結論

この章では、利子率が確率的に変動するとき、リアル・オプション・アプローチによる準備段階でのプロジェクトの評価について検討した。準備段階でのプロジェクト

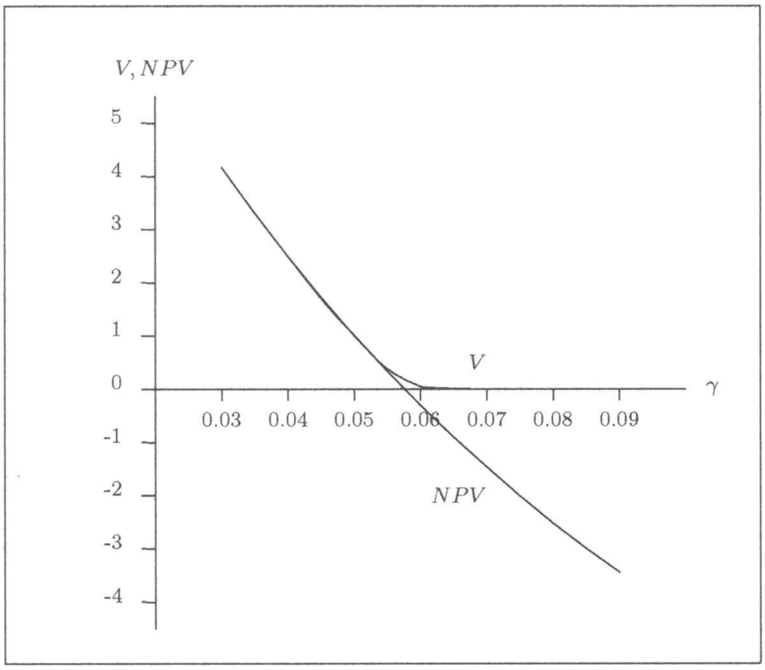

図 4.2: 準備時点での利子率とプロジェクトの価値

の価値は、投資実行時のプロジェクトの価値と投資コストに影響されるので、まず投資実行時でのプロジェクトの評価について考えた。投資実行時のプロジェクトの価値はプロジェクトから発生するキャッシュフローの現在価値である。利子率が確率的に変化するとき、将来のキャッシュフローの現在価値はリスク修正後のキャッシュフローの期待値に割引債価格をかけたものである。投資コストに仮定をおいたが、比較的に理解しやすい評価式が得られた。しかし、この評価式の特性を明らかにするには、解析的に議論するのは容易ではなかったので、数値計算によって簡略に検証した。用いたパラメータによる分析の結果として、リアル・オプションによる評価はプロジェクト価値がマイナスになることは避けられたが、債券価格による現在価値の評価と比べると、それほどの差は生じなかった。

第5章　確率的割引因子とプロジェクト評価

5.1　はじめに

リアル・オプション理論を応用して、プロジェクトの現在価値を計算する際に、プロジェクトの投資実行条件によって、計算の方法が違ってくる。プロジェクトへの投資がいつでも可能な場合は、プロジェクトの現在価値が最大になるような投資の実行条件を求めて、この条件が満たされるときに、投資が行われるとして、プロジェクトの現在価値を計算する。この場合のプロジェクトの現在価値は永久アメリカン・コール・オプションに類似する[1]。これに対して、プロジェクトの投資が将来ある時点のみで実行可能な場合は、そのときの状況に応じて、プロジェクトの投資を行うか否かが判断されるので、プロジェクトの現在価値はヨーロピアン・コール・オプションに類似する。この論文は、後者の方法を用いて、将来ある時点で投資の実行が可能となり、そのときの状況によって採否が決定されるプロジェクトの現在価値の評価について考える。投資がすぐに実行できないプロジェクトが多く存在する。一般に研究開発、設計、テスト・プラントの運営などの準備を経てからプロジェクトへの投資が可能となる。準備の段階にはある程度の時間を要するので、プロジェクトを実行する時点で状況が変化し、プロジェクトを実行しない方が良いことになるかもしれない。プロジェクトの準備に着手するかどうかを決定するためには、プロジェクトを実行したときに得られるキャッシュフローの現在価値から投資コストを差し引いたものを現在時点で評価し、これを準備費用と比べる必要があるので、プロジェクトの現在価値が意思決定の基準となる。

これまで、多くのリアル・オプションの文献では、無危険利子率を一定と仮定している。Berk etc.[3] では将来実行する可能性のあるプロジェクトの評価について確率的に変動する利子率を用いているが、離散時間モデルで議論し、将来次々と投資機会が発生するような場合の企業価値の評価を考えた。投資コストについては、将来のキャッシュフローと比例的な関係を仮定している。第4章では連続時間モデルで、利子率が確率的に変動する場合、キャッシュフローと投資コストが比例的関係と仮定して、プロジェクトの評価について議論した。この章では、連続時間モデルで、キャッシュフローと投資コストの変動が幾何ブラウン運動に従うとし、確率的割引因子を用いて、

[1] McDonald and Siegel[38] はリアル・オプション理論の先駆的な研究で、Dixit and Pindyck[18] はリアル・オプション理論の初期の研究を総括している。Copeland and Antikarov[12] は実務者向けに、離散時間モデルでこれらの考え方について丁寧に説明している。

プロジェクトの評価を試みる。

この章は以下のように構成される。次の節では、主要な内容となるプロジェクトの評価の方法を考え、解析的結果を示す。第3節では、数値解析を用いて確率的利子率を使用する効果を検討する。第4節では結論を述べる。付録には第2節の補題について、証明を記す。

5.2 プロジェクトの評価

予め決められた時刻 t で投資コスト K_t を支出することでプロジェクトの実行ができ、プロジェクトが存続する期間中、連続的に確率的に変動するキャッシュフローが発生するとする。プロジェクトから発生するキャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動に従うと仮定し、次の確率微分方程式

$$dC_t = \mu_c C_t dt + \sigma_c C_t dW_c \tag{5.1}$$

で表す。ここで、μ_c、σ_c は定数で、W_c はウィーナー過程である。

確率的キャッシュフローについての適切な確率的割引因子[2]を Z_t とし、その変動が次の確率微分方程式に従うとする。

$$dZ_t = -r_t Z_t dt - \sigma_z Z_t dW_z \tag{5.2}$$

σ_z は定数で、W_z はウィーナー過程である。$dW_c dW_z = \rho_{cz} dt$、$\rho_{cz}\sigma_c\sigma_z = \sigma_{cz}$ とする。r_t は無危険利子率である。

無危険利子率の変動を Vasicek[54] モデルを用いて表現する。

$$dr_t = a(\bar{r} - r_t)dt + \sigma_r dW_r \tag{5.3}$$

ここで、a、$\bar{r}$、σ_r は定数で、W_r はウィーナー過程である。$dW_r dW_c = \rho_{rc} dt$、$\rho_{rc}\sigma_r\sigma_c = \sigma_{rc}$、$dW_r dW_z = \rho_{rz} dt$、$\rho_{rz}\sigma_r\sigma_z = \sigma_{rz}$ とする。

Vasicek モデルでは、利子率の変動が線形確率微分方程式によって与えられるので、ある時点の利子率が与えられたとすれば、将来時点の利子率の表現は比較的に単純なものとなる。時刻 t での利子率が r_t である場合、s 時間後の利子率は（5.3）式から

$$r_{t+s} = r_t e^{-as} + \bar{r}(1 - e^{-as}) + \sigma_r \int_t^{t+s} e^{-a(t+s-\tau)} dW_r \tag{5.4}$$

となる。利子率の時刻 t から時刻 $t+s$ までの積分は

$$\int_t^{t+s} r_\tau d\tau = r_t B_s + \bar{r}(s - B_s) + \sigma_r \int_t^{t+s} B_{t+s-\tau} dW_r \tag{5.5}$$

[2] 確率的割引因子と確率的キャッシュフローの評価について詳しい議論は Cochrane[11]、飯原 [55] を参照。

となる。ここで $B_s = (1 - e^{-as})/a$ である。

プロジェクトの存続期間を T とし、確率的割引因子を用いることで、プロジェクトから発生するキャッシュフローの時刻 t での現在価値は、

$$U = E_t\left[\int_0^T (Z_{t+s}/Z_t)C_{t+s}ds\right] \tag{5.6}$$

となる。

命題 4 キャッシュフロー率の変動が *(5.1)* 式、確率的割引因子が *(5.2)* 式に従うとすると、時刻 $t+s$ でのキャッシュフローの時刻 t での現在価値は

$$E_t\left[(Z_{t+s}/Z_t)C_{t+s}\right] = C_t U_s(r_t) \tag{5.7}$$

$$\begin{aligned} U_s(r_t) \quad &= \exp[(\mu_c - \sigma_{cz})s + (\sigma_{rz} - \sigma_{rc})\int_0^s B_{s-\tau}d\tau \\ &-r_t B_s - \bar{r}(s - B_s) + \sigma_r^2/2\int_0^s B_{s-\tau}^2 d\tau] \end{aligned} \tag{5.8}$$

となる[3]。

証明　幾何ブラウン運動の性質から

$$\begin{aligned} Z_{t+s}/Z_t \quad &= \exp[-r_t B_s - \bar{r}(s - B_s) - \sigma_r\int_t^{t+s} B_{t+s-\tau}dW_r \\ &- \sigma_z^2 s/2 - \sigma_z\int_t^{t+s} dW_z] \end{aligned} \tag{5.9}$$

$$C_{t+s} = C_t \exp\left[(\mu_c - \sigma_c^2/2)s + \sigma_c\int_t^{t+s} dW_c\right] \tag{5.10}$$

となる。

(5.9) 式と (5.10) 式の左辺の指数部分を足し合わせて、平均と分散を計算する。正規確率変数 x の平均が μ_x、分散が σ_x^2 であるとき、$E(e^x) = \exp(\mu_x + \sigma_x^2/2)$ であることから、(5.7) 式を得る。 証明終

無危険利子率が一定である場合、$U_s(r_t) = \exp(\mu_c - \sigma_{cz} - r)s$ となる。σ_{cz} は一般にリスク・プレミアム (risk premium) あるいはコンビニエンス・イールド (conveniece

---

[3]

$$\int_0^s B_{s-\tau}d\tau = (s - B_s)/a$$

$$\int_0^s B_{s-\tau}^2 d\tau = (s - B_s)/a^2 - B_s^2/(2a)$$

yield) と呼ばれるものである。$\mu_c - \sigma_{cz}$ はリスク修正後のキャッシュフローのドリフトとなるので、無危険利子率 r が割引率となる。ここでは、各発生時点ごとに、キャッシュフローのリスクを修正し、その時点で満期となる割引債価格をかけている[4]。

プロジェクトから発生するキャッシュフローの時刻 t での現在価値は

$$U = C_t \int_0^T U_s(r_t) ds \tag{5.11}$$

となる。

時刻 t で、キャッシュフローの現在価値 U が投資コスト K_t を上回った場合のみに投資を実施するのであれば、プロジェクトの時刻0での現在価値は

$$V = E_0 \left[(Z_t/Z_0) \max (U - K_t, 0) \right] \tag{5.12}$$

となる。

無危険利子率 r が一定の場合には、U が対数正規確率変数となるので、K_t が定数であるとすると、V は Black and Scholes[5] モデルで計算することができる[5] 。しかし、無危険利子率が確率的に変動する場合には U が対数正規確率変数にはならないので、直接に Black-Scholes 式を用いて V を計算することはできない。

（5.4）式から無危険利子率 r_t が正規確率変数であることが分かる。(5.7) と（5.8）式から、明らかに $C_t U_s(r_t)$ は対数正規確率変数である。$U_s(r_t)$ が r_t の単調減少関数であるので、Jamshidian[24] の債券ポートフォリオ・オプションの評価手法を利用し、プロジェクトの現在価値 V の評価に適用する。

$F_t = K_t/C_t$ とし、r^* が次の方程式

$$\int_0^T U_s(r^*) ds = F \tag{5.13}$$

を満たすとする[6]。

(5.12) は次のようになる[7]。

$$\begin{aligned} V &= E_0 \left\{ (Z_t/Z_0) C_t \max \left[\int_0^T U_s(r_t) ds - \int_0^T U_s(r^*) ds, 0 \right] \right\} \\ &= \int_0^T E_0 \left\{ (Z_t/Z_0) C_t \max \left[U_s(r_t) - U_s(r^*), 0 \right] \right\} ds \end{aligned} \tag{5.14}$$

[4] $\mu_c = \rho_{cz} = \rho_{rc} = 0$ のとき、$U_t(r_s)$ は満期までの期間が s の割引債の時刻 t での価格となる。

[5] K_t も対数正規確率変数であるときには Margrabe[36] の交換オプション（Exchange Option）モデルで計算できる。

[6] $F \geq 0$ であれば r_* は存在する。$r^* \geq 0$ と限定するならば、$\int_0^T U_s(0) ds \geq F \geq 0$ を満たさなければならない。

[7] ここでは、プロジェクトの終了時点 T を一定としているが、T が確率的に変動する場合は T の分布が確定的であれば、この議論を適用できる。

(5.14) 式の右辺の被積分関数を

$$V_s = E_0\left\{(Z_t/Z_0)C_t \max[U_s(r_t) - U_s(r^*), 0]\right\} \tag{5.15}$$

で表すとすると

$$V = \int_0^T V_s ds \tag{5.16}$$

となるので、V_s を計算すれば、V を計算できる。以降の議論は V_s の計算を問題とする。

補題 2 対数正規確率変数 X と Y について

$$E[\max(X - Y, 0)] = E(X)N(d) - E(Y)N(d - \sigma)$$

が成り立つ。ここで、$N(\cdot)$ は標準正規確率分布関数で、

$$d = [\ln(E(X)/E(Y)) + \sigma^2/2]/\sigma$$

$$\sigma^2 = \mathrm{var}(\ln(X/Y))$$

である。(証明は付録)

(5.15) 式の右辺の 2 つの項をそれぞれ、

$$(Z_t/Z_0)C_t U_s(r_t) = X_s \tag{5.17}$$

$$(Z_t/Z_0)C_t U_s(r^*) = X_s^* \tag{5.18}$$

とすると、

$$V_s = E_0[\max(X_s - X_s^*, 0)]$$

となる。

投資コストとキャッシュフロー率が比例関係にあると仮定する。この場合、F が定数となるので、r^* が確定値となる。X_s と X_s^* がいずれも対数正規確率変数となるので、補題 2 を利用すると、

$$V_s = E_0(X_s)N(d_s) - E_0(X_s^*)N(d_s - \sigma_s)$$

$$d_s = [\ln(E_0(X_s)/E_0(X_s^*)) + \sigma_s^2/2]/\sigma_s$$

$$\sigma_s^2 = \mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*))$$

と書ける。$E_0(X_s)$、$E_0(X_s^*)$、$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*))$ の計算が問題となる。

命題 5 X_s と X_s^* がそれぞれ（*5.17*）式と（*5.18*）式で定義され、r^* が確定値である場合、*0* 時点の情報の下では

$$E_0(X_s) = C_0 U_{t+s}(r_0) \tag{5.19}$$

$$E_0(X_s^*) = C_0 U_t(r_0) U_s(r^*) \tag{5.20}$$

$$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)) = \sigma_r^2 B_s^2 (1 - e^{-2at})/2a \tag{5.21}$$

となる。

証明　（5.17）式左辺の $C_t U_s(r_t)$ をその定義である (5.7) 式の左辺で代入し、期待値の性質を利用して、整理すると

$$E_0(X_s) = E_0\left[(Z_{t+s}/Z_0)C_{t+s}\right]$$

となる。$U_s(r^*)$ は定数であるので、

$$E_0(X_s^*) = E_0[(Z_t/Z_0)C_t]U_s(r^*)$$

である。それぞれの右辺に命題 4 を適用すると、（5.19）式と（5.20）式の右辺を得られる。

X_s と X_s^* に（5.8）式を代入して整理すると

$$\ln(X_s/X_s^*) = B_s(r_t - r^*)$$

となる。（5.4）式で r_t を 0 時点の利子率 r_0 で表現し、r^* が定数であるから、

$$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)) = \mathrm{var}\left(B_s\sigma_r \int_0^t e^{-a(t-\tau)} dW_r\right) \tag{5.22}$$

となる。計算すると、(5.21) 式を得る。　証明終

Berk etc.[3] は離散時間モデルで、類似の議論をしている。投資コストがキャッシュフローと比例関係にあると仮定して議論するのは、現実を説明する際に限定的な意味しか持たないが、次の一般的な議論に拡張するときの基本となる。

投資コストについてより一般的な仮定を考える。投資コスト K_t の変動が幾何ブラウン運動に従うとし、次の確率微分方程式で表す。

$$dK_t = \mu_k K_t dt + \sigma_k K_t dW_k \tag{5.23}$$

ここで、μ_k、σ_k は定数で、dW_k はウィーナー過程である。$dW_z dW_k = \rho_{zk} dt$、$dW_r dW_k = \rho_{rk} dt$、$dW_c dW_k = \rho_{ck} dt$、$\rho_{zk}\sigma_z\sigma_k = \sigma_{zk}$、$\rho_{rk}\sigma_r\sigma_k = \sigma_{rk}$、$\rho_{ck}\sigma_c\sigma_k = \sigma_{ck}$ とする。

この場合（5.13）式の右辺 F が対数正規確率変数となる。(5.13) 式を満たす確定値 r^* が存在しないので、直接に V_s を計算することはできない。対数正規確率変数 F が

とりうる値 $0 \leq F \leq \infty$ で、ある確定値 f を与えると、(5.13) 式を満たす r^* が求められ、$F = f$ のときに

$$V_s(f) = E_0[\max(X_s - X_s^*, 0)|F = f] \tag{5.24}$$

とする。

（5.24）式に補題 2 を適用すると

$$V_s(f) = E_0(X_s|F = f)N(d_s(f)) - E_0(X_s^*|F = f)N(d_s(f) - \sigma_s(f))$$

となる。ここで

$$d_s(f) = [\ln(E_0(X_s|F = f)/E_0(X_s^*|F = f)) + \sigma_s^2(f)/2]/\sigma_s(f)$$

$$\sigma_s^2(f) = \mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)|F = f)$$

である。

$V_s(f)$ が求まれば

$$V_s = \int_{-\infty}^{+\infty} V_s(e^x)\phi(x)dx \tag{5.25}$$

となる。$\phi(x)$ は平均 $\mu_f t = \ln K_0 - \ln C_0 + (\mu_k - \sigma_k^2/2 - (\mu_c - \sigma_c^2/2))t$、分散 $\sigma_f^2 t = (\sigma_k^2 + \sigma_c^2 - 2\sigma_{ck})t$ の正規確率変数の密度関数を表す。

残された問題は $E_0(X_s|F = f)$、$E_0(X_s^*|F = f)$、$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)|\ln(F = f))$ の計算のみである[8]。

補題 3 対数正規確率変数 X と Y について、

$$E(X|Y = \Psi) = E(X)\Psi^{\beta}/E(Y^{\beta}) \tag{5.26}$$

となる。ここで、$\beta = \mathrm{cov}(\ln X, \ln Y)/\mathrm{var}(\ln Y)$ である。（証明は付録）

命題 6 0時点の情報の下で

$$E_0(X_s|F = f) = E_0(X_s)f^{\beta_s}/E_0(F^{\beta_s}) \tag{5.27}$$

$$E_0(X_s^*|F = f) = E_0(X_s^*)f^{\beta_0}/E_0(F^{\beta_0}) \tag{5.28}$$

$$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)|\ln(F = f)) = \sigma_r^2 B_s^2 \frac{1 - e^{-2at}}{2a} - \frac{[(\sigma_{rc} - \sigma_{rk})B_t B_s]^2}{\sigma_f^2 t} \tag{5.29}$$

[8] 投資コストを一定と考える場合には、C_t についての条件付期待値を計算する必要があるので、ここでの議論と類似する。

となる。ここで

$$\beta_s = \frac{(\sigma_{rc} - \sigma_{rk})[t - e^{-as}B_t]/a + (\sigma_{ck} - \sigma_c^2 - \sigma_{zk} + \sigma_{zc})t}{\sigma_f^2 t} \tag{5.30}$$

$$\beta_0 = \frac{(\sigma_{rc} - \sigma_{rk})(t - B_t)/a + (\sigma_{ck} - \sigma_c^2 - \sigma_{zk} + \sigma_{zc})t}{\sigma_f^2 t} \tag{5.31}$$

$$E_0(F^{\beta_\tau}) = \exp(\beta_\tau \mu_f t + \beta_\tau^2 \sigma_f^2 t/2) \tag{5.32}$$

である。

証明　　補題3を利用すると、(5.27) 式と (5.28) 式を得る。ここで $E_0(X_s)$ と $E_0(X_s^*)$ は命題5での (5.19) 式と (5.20) 式を利用する。

補題3での β の定義から

$$\beta_s = \mathrm{cov}(\ln X_s, \ln F)/\mathrm{var}(\ln F)$$

$$\beta_0 = \mathrm{cov}(\ln X_s^*, \ln F)/\mathrm{var}(\ln F)$$

である。

X_s、X_s^* と F の定義から

$$\ln X_s = \alpha_1 - \sigma_r \int_0^t B_{t-\tau} dW_r - \sigma_z \int_0^t dW_z + \sigma_c \int_0^t dW_c - B_s \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-\tau)} dW_r$$

$$\ln X_s^* = \alpha_2 - \sigma_r \int_0^t B_{t-\tau} dW_r - \sigma_z \int_0^t dW_z + \sigma_c \int_0^t dW_c$$

$$\ln F = \alpha_3 + \sigma_k \int_0^t dW_k - \sigma_c \int_0^t dW_c$$

となる。ここで α_1、α_2、α_3 は確率変数の非確率的に変動する部分を表す。

$$B_{t-\tau} + B_s e^{-a(t-\tau)} = B_{t+s-\tau}$$

を用いて、 $\ln X_s$ での W_r についての2つの積分の項を整理し、β_s と β_0 を計算すると、(5.30) 式と (5.31) 式を得られる。

正規確率変数 x と y について、$\mathrm{var}(x|y = \psi) = \mathrm{var}(x) - [\mathrm{cov}(x, y)]^2/\mathrm{var}(y)$ であるから

$$\mathrm{var}(\ln(X_s/X_s^*)|F = f) = \mathrm{var}\left(B_s \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-\tau)} dW_r\right)$$
$$- \left[\mathrm{cov}\left(B_s \sigma_r \int_0^t e^{-a(t-\tau)} dW_r, \sigma_k \int_0^t dW_k - \sigma_c \int_0^t dW_c\right)\right]^2 /\mathrm{var}(\ln F)$$

となる。これを計算すると、(5.29) 式を得る。　証明終

5.3 数値分析

前節で得られた解析的結果について、プロジェクトの評価に確率的利子率を用いた効果を解析的に分析することは困難である。この節では、前節で得られた投資コストが確率的に変動する場合の解析的結果について数値分析を行う。あるパラメータの効果を調べるため、他のパラメータを固定しておく必要があるので、計算に用いるすべてのパラメータの基準値を決めておく。パラメータの基準値は表 5.1 の通りである。基準値でのプロジェクトの現在価値は約 4.283 となる。

表 5.1: パラメータの基準値

パラメータ名	値
σ_z 確率的割引因子のボラティリティ	0.5
$\bar{r}$ 無危険利子率の回帰水準	0.07
r_0 0 時点での無危険利子率	0.05
a 無危険利子率の回帰速度	0.05
σ_r 無危険利子率のボラティリティ	0.002
μ_c キャッシュフローのドリフト率	0.05
σ_c キャッシュフロー変化率のボラティリティ	0.3
C_0 0 時点でのキャッシュフロー率	1
μ_k 投資コストのドリフト率	0.04
σ_k 投資コスト変化率のボラティリティ	0.2
K_0 0 時点での投資コスト	10
ρ_{zc} W_z と W_c の相関係数	0.2
ρ_{zr} W_z と W_r の相関係数	0
ρ_{zk} W_z と W_k の相関係数	0.3
ρ_{rc} W_r と W_c の相関係数	0.5
ρ_{rk} W_r と W_k の相関係数	0.3
ρ_{ck} W_c と W_k の相関係数	0.5
t 投資実行するまでの期間	2
T プロジェクトの存続期間	20

無危険利子率を一定と仮定した場合との比較を考える。無危険利子率 r が一定であるとすると、時刻 t から $t+T$ までに発生するキャッシュフローの時刻 t での現在価値は $C_t(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T})/(r-\mu_c+\sigma_{zc})$ となる。

プロジェクトの評価は Black-Scholes タイプのモデルに類似する。この場合、プロ

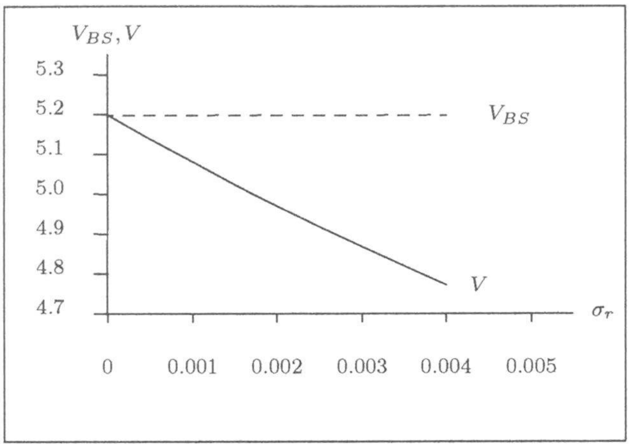

図 5.1: Black-Scholes モデルとの比較

ジェクトの現在価値は

$$V_{BS} = \frac{C_0 e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})t}(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T})}{r-\mu_c+\sigma_{zc}} N(d) \\ -K_0 e^{-(r-\mu_k+\sigma_{zk})t} N(d-\sigma_f\sqrt{t})$$

となる。ここで

$$d = \frac{\ln[\frac{C_0 e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})t}(1-e^{-(r-\mu_c+\sigma_{zc})T})}{r-\mu_c+\sigma_{zc}}] - \ln(K_0 e^{-(r-\mu_k+\sigma_{zk})t}) + \sigma_f^2 t/2}{\sigma_f\sqrt{t}}$$

である。

Black-Scholes タイプのモデルによる評価と比較するため、$r = r_0 = \bar{r}$ とする。図 5.3 は $r = 5\%$ として、いろいろな無危険利子率のボラティリティの値で計算した V の結果と、V_{BS} の比較を示している。無危険利子率のボラティリティが小さいときには、それほどの差が現れないが、無危険利子率のボラティリティが大きくなるにつれ、両者の差が広がる。図 1 から分かるように、無危険利子率のボラティリティが零あるいはその近傍ではない限り、Black-Scholes モデルを利用して、プロジェクトを評価すると、誤差が生じる。特に無危険利子率のボラティリティが大きい場合には、この数値例では、Black-Scholes モデルを直接に利用することで、プロジェクトを過大評価している。

ここでは無危険利子率のボラティリティが大きくなるにつれ、プロジェクトの現在価値が減少する現象が起きている。これは相関係数が影響を与えていると考えられるので、ρ_{rc} と ρ_{rk} について数値的に調べてみる。

いくつか異なる ρ_{rc} に対し、無危険利子率のボラティリティがプロジェクトの現在価値に与える効果を調べた。図 5.2 では ρ_{rc} が $-0.5, 0, 0.5$ の 3 つの値をとるときにつ

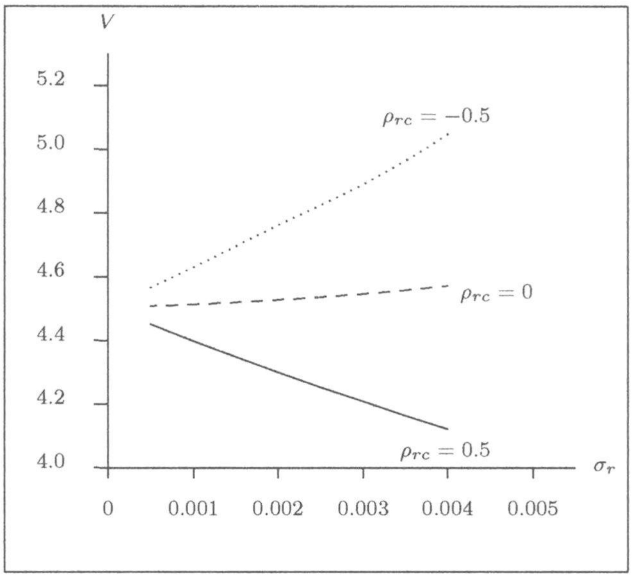

図 5.2: 無危険利子率のボラティリティの効果 (1)

いて、3 本の曲線で表示している。ρ_{rc} が負の値をとるとき、σ_r プロジェクトの現在価値を上げる効果を持っている。その効果は σ_r が大きくなるにつれ大きくなる。$\rho_{rc} = 0$ のときには、σ_r はわずかにプロジェクトの現在価値を上げているので、一般のオプション評価での結果と一致している。ρ_{rc} が正の値をとるときには、σ_r がプロジェクトの現在価値を下げる効果を持っている。この結果が示していることは、無危険利子率のボラティリティがプロジェクトの現在価値に与える影響はキャッシュフローの変化率の変動と無危険利子率の変動の相関によって異なるので、確率的利子率でプロジェクトを評価する際、、相関の推定が重要である。

図 5.3 は無危険利子率のボラティリティが異なる ρ_{rk} のときに、プロジェクトの現在価値に与える効果を示しいる。ρ_{rk} が正の値から負の値になるにつれプロジェクトの価値は次第に減少するが、その効果は ρ_{rc} によるものに比べると小さい。これはキャッシュフローがプロジェクトの存続期間中に連続的に発生するものであるのに対し、投資コストは投資実行時に一回のみ支出されるものであるので、無危険利子率のボラティリティから受ける影響が少ないことによる。

5.4 結論

この章は、予め決めた将来の時点で、採否が決定されるプロジェクトの現在価値の評価について議論した。プロジェクトが実行された場合、プロジェクトから連続的にキャッシュフローが発生するとし、その変動を幾何ブラウン運動に従うとした。プロ

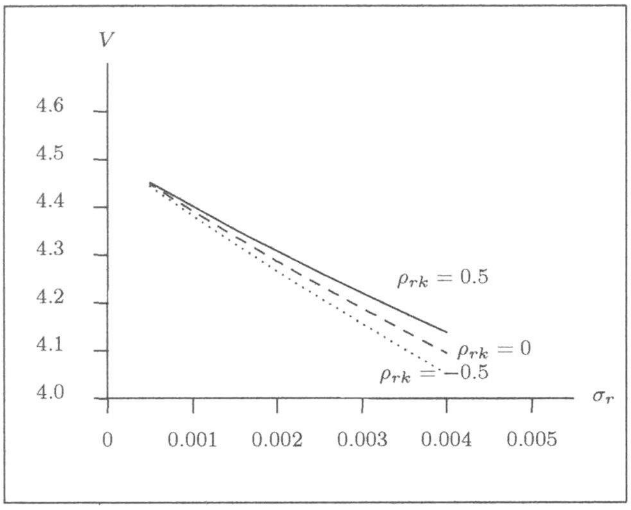

図 5.3: 無危険利子率のボラティリティの効果 (2)

ジェクトを評価する際に、確率的割引因子を使用し、無危険利子率の変動については、Vasicek[54] モデルを利用した。プロジェクトの実施時点で評価したキャッシュフローの現在価値が投資コストを上回るときにのみ投資が実施される場合、プロジェクトの準備開始時点での価値はヨーロピアン・オプションと類似するが、確率的割引因子を使用するため、Black-Scholes[5] モデルを直接に利用して、プロジェクトを評価することはできない。そこで、Jamshidiam [24] が債券ポートフォリオのオプション評価に用いた手法を利用しプロジェクトの評価法を考えた。まず、投資コストがキャッシュフローと比例関係にあると仮定し、プロジェクト評価の基本的な枠組みを構築した。次に、投資コストが確率的に変動する場合ついて、基本的な枠組みを拡張し、プロジェクトの評価法を確立した。最後には、数値分析を用いて、確率的割引因子がプロジェクトの価値に与える影響を検討した。確率的割引因子で評価したプロジェクトの価値と、利子率を一定と仮定して評価したプロジェクトの価値は場合によってかなりの乖離が生じる。乖離の原因は利子率のボラティリティだけではなく、確率的要素の間の相関も無視できない。プロジェクトを評価する際、これらの要因を考慮する必要があると考えられる。

第6章　不確実性下での競争的参入

6.1　はじめに

リアル・オプション・アプローチによる投資の決定とプロジェクトの評価の初期の文献では、企業の意思決定は他の企業の行動を考慮することなく、単独的な意思決定問題として扱われる場合がほとんどである[1]。現実の企業の投資決定問題の大多数は市場での競争、例えば、新規企業の参入、あるいは既存の企業の拡張を考慮に入れなければならない。Leahy[33] は完全競争市場で、需要が確率的に変動するときの企業の生産能力の拡張行動を分析し、競争均衡での最適投資決定を導きいた。Grenadier[21] は寡占市場で、需要の確率的変動に対する企業の生産能力の拡張問題について議論をし、企業数に対応する競争均衡での最適投資決定を導出した。新規企業の参入問題については、Dixit and Pindyck[18] の８章では、完全競争産業での企業の参入問題と独占産業での企業の参入問題を比較しながら議論し、２つの極端なケースの類似点を示した。続いて、９章では、寡占産業での参入問題を取り上げ、２企業の参入モデルについて、各企業が市場に参入する順序が特定されていない場合と順序が特定されている場合について分析している。参入する順序が特定されない場合については、確率変数の大きさに応じて、いずれの企業も参入しない領域、２つの企業がともに参入する領域を明らかにしている。２つの企業の参入順序が予め特定されている場合については、先行企業と後続企業の参入水準と、それらの企業の参入前と参入後の企業価値について分析した。Baba[2] は Dixit and Pindyck[18] の２企業参入モデルを銀行の貸し出し市場での競争問題に応用し、二つの銀行が市場への参入順位が特定されいる場合と特定されていない場合について、それぞれの銀行の貸し出し決定について分析している。Joaquin and Butler[25] は、違ったコスト構造を持つ２つの企業について分析し、参入の順序が予め特定されていない場合でもコストが企業間で異なるときには、参入順序が決まることを証明した。

上で上げたいくつかの研究例は、単純な市場構造を仮定して競争的産業における企業の投資決定問題を説明しているが、多くの示唆が含まれている。しかし、これまでの分析は２企業の参入問題だけを取り上げている。Grenadier[21] は多数の企業が参入している市場での生産能力の競争的拡張について分析しているが、参入企業数が一定

[1] Brennan and Schwartz[9] と McDonald and Siegel[37] は先駆的な研究であり、Dixit and Pindyck[18] の５章、６章、７章はこのような議論をよくまとめてある。

としている。この論文では、多くの企業が次々と市場に参入する場合について分析する。その際、企業は市場で競争的に行動するものと考える。Joaquin and Butler[25]では線形の需要関数を考え、そこでの競争均衡を分析しているが、この章では、需要の価格弾力性が一定であるような需要関数を考えて、そこでの競争均衡の特性を明らかにし、それを基礎にしている多数の企業が逐次市場に参入するような世界での企業の参入問題を考える。企業は参入時に一定額の初期投資が要求され、参入後は追加投資なしに生産量を自由に調整することができるものとし、単位生産量当たりの生産コストは一定であると仮定する。需要の価格弾力性が1以上の場合を考え、市場に参入した企業はその他の企業の供給量を所与として、利潤が最大になるように各自の生産量を決定する。まだ市場に参入していない企業は、需要の状況についての確率変数がある水準に到達するまで待ち続ける。参入水準は投資の正味現在価値が最大になるような水準が選ばれ、参入水準に達すると、直ちに投資と行い、市場に参入する。

この章は次のように構成される。第6.2節では、モデルを説明し、解析的に最適参入水準、企業の現在価値を求める。第6.3節では、数値例を用いてモデルの特性について分析する。第6.4節では、結論を述べる。

6.2 モデル

多数の企業が同質の製品を供給する寡占的市場で、製品の逆需要関数が

$$P = X_t Q^{-\varepsilon} \tag{6.1}$$

であるとする。P は価格で、Q は総供給量である。X_t は製品の需要に与える不確実な外生的要因で、X_t の変動は一定のドリフト率 μ、一定のボラティリティσ の幾何ブラン運動に従うとし、

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_t \tag{6.2}$$

で表す。W_t はウィーナー過程である。需要の価格弾力性は $\eta = 1/\varepsilon > 1$ とする。

企業は生産を行うために、工場設備等の初期投資が必要となる。一旦、投資が実行されると、これらの工場設備等を使用して生産を継続できる。生産量は追加的な投資なしに自由に調整することが可能とし、製品の単位生産費用は生産量に関係なく一定であると仮定する。生産設備は他の製品の生産への転用・売却することができないとし、企業の撤退を考えないことにする。

6.2.1 競争市場における企業の利潤

n 社の企業が同一の製品を供給する寡占市場を考える。各社の製品の単位当たり生産コストは生産量に関係なく一定であると仮定し、企業 i の単位当たり生産コスト(以

下は単に生産コストと呼ぶことにする）が c_i であるとし、企業 i の生産量を $q_i \geq 0$ とすると、企業 i の利潤は

$$\Pi_i = (P - c_i)q_i \tag{6.3}$$

となる。$\bar{c} = \sum_{i=1}^n c_i/n$ を平均的生産コストと呼ぶこととし、$c_i/\bar{c}$ が 1 の近傍であるとする[2]。総生産量 Q は $\sum_{i=1}^n q_i$ である。

各々の企業が他の企業の供給量を所与として、利潤が最大になるように供給量を調整するナッシュ＝クールノー均衡での均衡価格と、企業 i の利潤は次の命題によって与えられる（証明は付録）。

命題 7 $X_t = x$ のとき、ナッシュ＝クールノー均衡での均衡価格は

$$P = \frac{\bar{c}}{1 - \varepsilon/n} \tag{6.4}$$

であり、企業 i の利潤は

$$\Pi_i(x) = \pi_i x^\eta \tag{6.5}$$

となる。ここで、

$$\pi_i = \varepsilon y_i^2 P^{1-\eta} \tag{6.6}$$

であり、

$$y_i = \eta(1 - c_i/P) \tag{6.7}$$

は企業 i の市場占有率である。市場への参入企業数が一定のままであると、企業 i の総利潤の割引現在価値は、割引率 r を一定とすると、

$$E_0\left[\int_0^\infty \pi_i X_t^\eta e^{-rt} dt \mid X_0 = x\right] = \frac{\pi_i x^\eta}{R} \tag{6.8}$$

となる。ここで、$R = r - \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta - 1) - \mu\eta > 0$ であるとする。

(6.4) 式から分かるように、均衡価格は需要の不確実的な要因に影響されず、企業の数と平均生産コストの関数となっている。需要の変動に応じて、生産量を絶えず調整することで、企業の利潤は、需要の不確実的な要因 x の η 乗に比例することになる。

6.2.2 企業の市場への逐次参入と企業価値

前の節では、市場に参入している企業数が一定であると仮定したが、X_t の変化とともに市場に参入する企業数が増加することを考えてみる。

[2]この仮定は市場占有率の内点解の存在条件を保証する（付録 D.1 を参照)。

企業 i の利潤 $\Pi_i(x)$ は市場に参入している企業数に依存するので、市場に参入している企業数が n のときの利潤を

$$\Pi_i(x;n) = \pi_i(n)x^\eta$$

と表す。また、以下に明らかにするように将来の利潤の期待割引値（これを以下では企業価値と呼ぶことにする）は、最終的に市場に参入する総企業数にも依存する。

最終的に参入する総企業数を N とし、現在、n 社が市場に参入しているときの既に市場に参入している企業 i の企業価値を $V_i(x;n)$ で表す。$V_i(x;n)$ は次の微分方程式を満たす[3]。

$$\frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 V_i(x;n)}{\partial x^2} + \mu x \frac{\partial V_i(x;n)}{\partial x} + \pi_i(n)x^\eta - rV_i(x;n) = 0 \tag{6.9}$$

$x=0$ のとき、$V_i(x;n)=0$ となるので、

$$V_i(x;n) = A_i(n)x^\beta + \frac{\pi_i(n)}{R}x^\eta \tag{6.10}$$

となる[4]。β は2次方程式

$$f(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2\beta(\beta-1) + \mu\beta - r = 0$$

の正根である。(6.10) 式の右辺第2項は将来企業の新規参入がない場合に得られる利潤の現在価値を表し、(6.8) 式と一致する。第1項は将来他の企業の参入による企業 i の企業価値変化を表している。$V_i(x;n)$ が有限な値になるためには、$R>0$ でなければならないが、$\eta<\beta$ であれば、$R>0$ となる。

企業 j が n 番目に市場に参入する場合について考えてみる。この企業の参入コスト（投資コスト）が I_j で、現在の X_t の水準が x で、X_t が x_n に達したときに企業 j が市場に参入することにすると、将来の利潤の現在時点での期待割引値（＝企業 j の企業価値）は (6.10) 式から

$$\left(\frac{x}{x_n}\right)^\beta \left[A_j(n)x_n^\beta + \frac{\pi_j(n)}{R}x_n^\eta - I_j\right] \tag{6.11}$$

となる[5]。この値を最大にする x_n は

$$x_n = \left(\frac{\beta}{\beta-\eta}\frac{RI_j}{\pi_j(n)}\right)^\varepsilon \tag{6.12}$$

となる。

[3]詳細な議論は Dixit and Pindyck[18] 4章を参照。
[4](6.10) 式が (6.9) 式の解であることは (6.10) 式を (6.9) 式に代入することにより確認できる。
[5]Dixit and Pindyck[18] 第9章付録参照。

企業 j が n 番目に市場に参入し、企業 k が $n+1$ 番目に市場に参入したとき、

$$I_j/\pi_j(n) < I_k/\pi_k(n+1)$$

であれば、$x_n < x_{n+1}$ となる。投資コストが全ての企業について等しいとすると、生産コストが低い企業から順次市場に参入した場合、各企業の参入時の利潤は次第に減少することになり、$x_n < x_{n+1}$ が成立する[6]。

ここでは、企業の市場への参入の条件を確率変数 X_t の値で示したが、このモデルでは、参入企業数が決まると価格水準は確定的に決まるので、$n-1$ 社が参入しているときの価格水準を $P(n-1)$ とすると、$n-1$ 社にたいする総需要が $(x_n/P(n-1))^\eta$ に達したときに企業 j が n 番目に市場に参入することになる。ただ、以下では確率変数 X_t を使って議論することにする。

x_n で n 番目の企業が市場に参入すると、それまでに参入している企業 i の企業価値はその時点で $V_i(x_n; n-1)$ であるとともに、$V_i(x_n; n)$ でもあるから

$$A_i(n-1)x_n^\beta + \frac{\pi_i(n-1)}{R}x_n^\eta = A_i(n)x_n^\beta + \frac{\pi_i(n)}{R}x_n^\eta \tag{6.13}$$

となり、これから

$$A_i(n-1) = A_i(n) + \frac{\pi_i(n) - \pi_i(n-1)}{R}x_n^{\eta-\beta} \tag{6.14}$$

となる。市場に最終的に参入する企業数が N であるから、$A_i(N) = 0$ で、

$$A_i(n) = \sum_{m=n+1}^{N} \frac{\pi_i(m) - \pi_i(m-1)}{R}x_m^{\eta-\beta} \tag{6.15}$$

となる。以上をまとめると次の命題が得られる。

命題 8 現在 X の水準が x で、参入している企業数が n であるとき、企業 i の市場に参入後の企業価値は

$$V_i(x; n) = A_i(n)x^\beta + \frac{\pi_i(n)}{R}x^\eta \tag{6.16}$$

となる。企業 i の市場に参入前の企業価値は企業 i が n 番目に市場に参入する場合、

$$W_i(x) = \left(A_i(n)x_n^\beta + \frac{\pi_i(n)}{R}x_n^\eta - I_i\right)\left(\frac{x}{x_n}\right)^\beta, \qquad x \le x_n \tag{6.17}$$

となる。ここで

$$x_n = \left(\frac{\beta}{\beta-\eta}\frac{RI_i}{\pi_i(n)}\right)^\varepsilon$$

であり、

$$A_i(n) = \sum_{m=n+1}^{N} \frac{\pi_i(m) - \pi_i(m-1)}{R}x_m^{\eta-\beta}$$

である。

[6]付録を参照。

6.3 数値例

この節では、モデルの特性を明らかにするため、数値例を用いて分析する。計算を簡単にするため、すべての企業の投資コストと生産コストが等しいとし、I と c で表す。計算で使用されるパラメータの値を表 6.1 にまとめた。

表 6.1: パラメータの値

パラメータ	値	パラメータ	値
σ	0.2	ε	0.8
μ	0	c	1
r	0.04	I	10

最終的に市場に参入する企業数 N が 1 から 4 までの場合について、各企業の参入水準を計算した結果を表 6.2 でまとめた。表から分かるように市場に最終的に参入する企業数が変わっても、それぞれの企業の参入水準は変わらない。

表 6.2: 参入水準

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$
x_1	1.52	1.52	1.52	1.52
x_2		3.69	3.69	3.69
x_3			6.78	6.78
x_4				10.56

最終的に市場に参入する企業が 1 から 4 までのそれぞれの場合について、市場参入後の企業価値を図 6.1 から図 6.4 までに示した。

独占市場における企業の現在価値は単純な期待値であり、図 6.1 で示している。図 6.2 は複占市場における企業の現在価値を示している。曲線 $V_i(x;1)$ は市場に参入している企業が 1 社のときの現在価値を示し、$x=0$ から $x=3.69$ までの範囲で推移する。x が一旦 3.69 に達すると 2 社目の企業が参入し、複占状態になり、各企業の現在価値は曲線 $V_i(x;2)$ 上で推移する。この場合 x の範囲は 0 から ∞ までとなる。図 6.3 と図 6.4 はそれぞれ最終的に参入する総企業数が 3 社と 4 社のとき各企業の現在価値の推移を示している。これらの図から分かるように市場に参入する企業の数が増えるにつれ、同一の x の水準にたいする各企業の企業価値は減少していく。

1 番目に参入する企業は x_1 で参入するのが最適であることは 6.2 節で議論した。また、(6.12) 式から、最終的に参入する企業の総数に関わらず、x_1 は一定であることも分かる。ここの数値例では $x_1=1.52$ である。$0 \leq x \leq 1.52$ の範囲で、1 番目に参

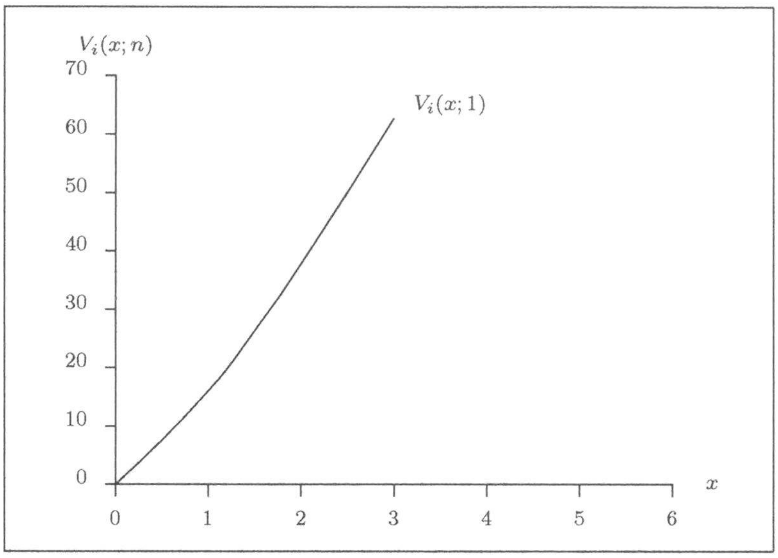

図 6.1: 企業価値の推移 $N = 1$

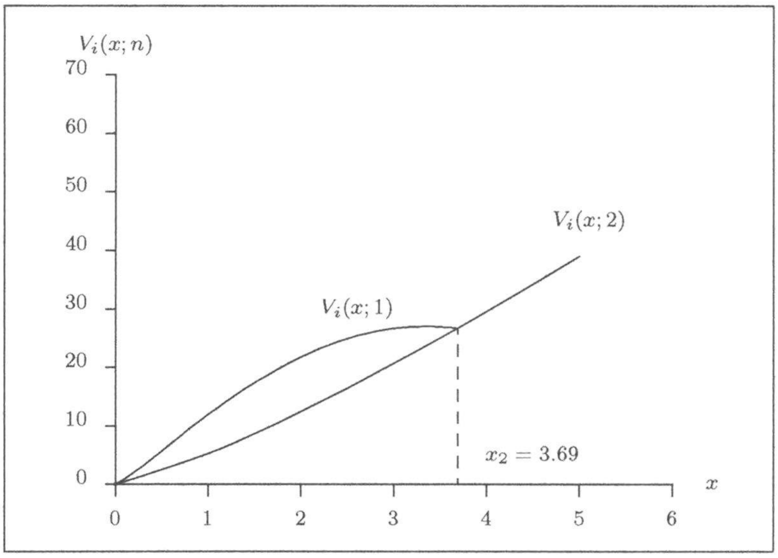

図 6.2: 企業価値の推移 $N = 2$

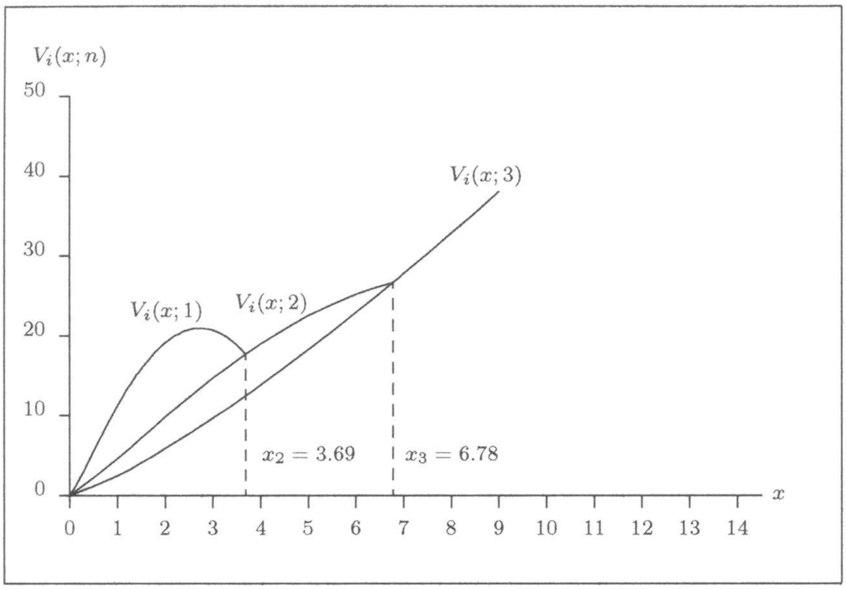

図 6.3: 企業価値の推移 $N = 3$

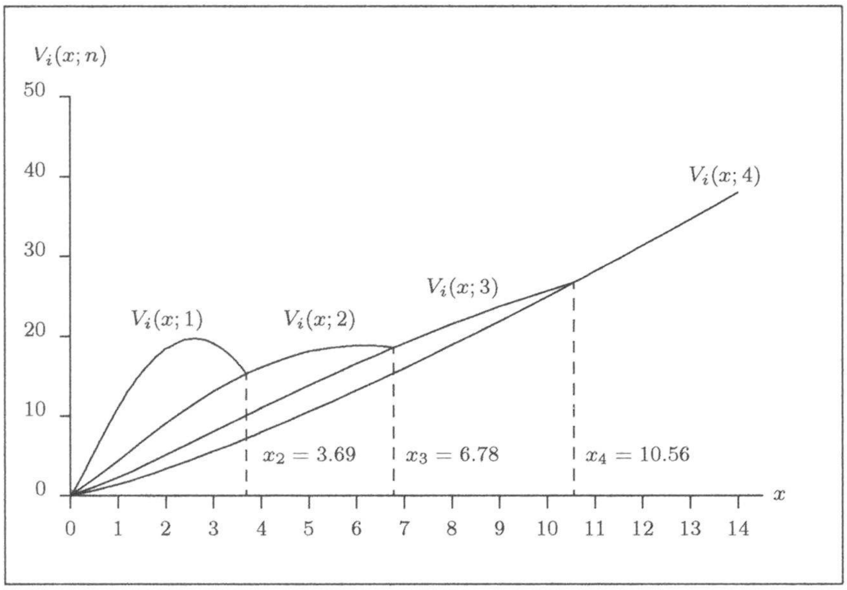

図 6.4: 企業価値の推移 $N = 4$

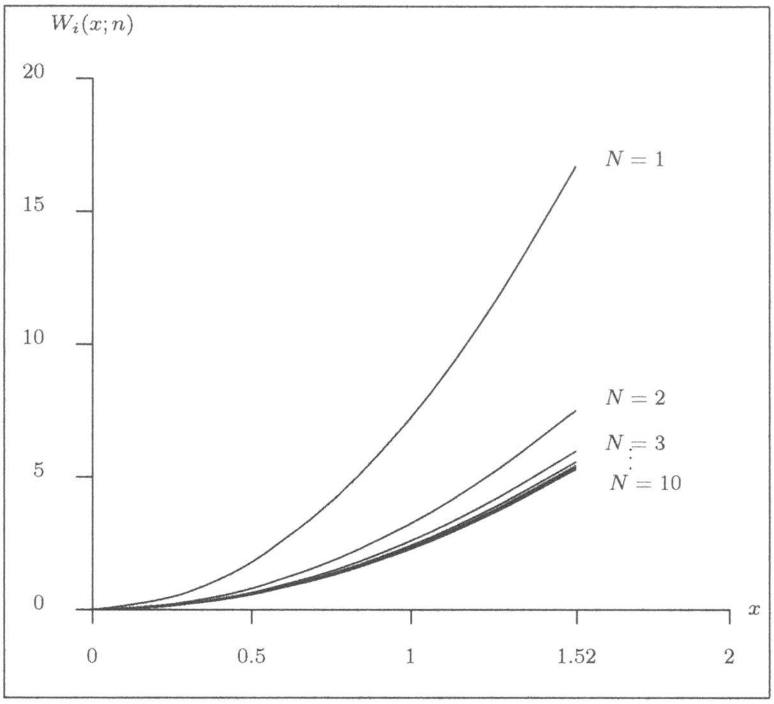

図 6.5: 参入前の企業価値

入する企業の参入前の企業価値 $W_i(x;1)$ が将来市場に参入する総企業数 N によってどのような影響を受けるか分析してみる。図 6.5 は将来参入する総企業数が 1 社から 10 社までについて、1 番目に参入する企業の参入前の企業価値をを１０本の曲線で示している。図からわかるように、将来参入する総企業数が多いほど、1 番目に参入する企業の参入前の企業価値が少なくなる。独占的市場（$N = 1$ の場合）での企業の参入前の企業価値と寡占的市場（$N = 2$ の場合）での企業の参入前の企業価値はかなりの差が生じている。この差の広がりは将来参入する総企業数の増加につれて減少し、将来参入する企業数が図で示された数より多くなっても、1 番目に参入する企業の参入前の企業価値は $N = 10$ のときとほとんど変わらない。

これまで、最終的に参入する企業数を 1 ないし 2 企業に限定することにより、企業の参入前企業価値がかなり高いことが主張されてきた。しかし、参入前企業価値は最終的に市場にどれだけの企業が参入するかによって、その値が大きく変わってくる。新規事業の評価に当たっては将来の競争状況を適確に予測することが必要である。

6.4 結論

この章では、多数の企業が逐次的参入する競争市場における参入問題について議論した。需要の価格弾力性が一定の逆需要関数を使用し、単位生産コストを生産量と関係なく一定とし、確率的にシフトする需要に対して、市場に参入した企業は他の企業の生産量を所与として、利潤が最大になるように生産量を決定する仮定の下では、価格は需要の確率的シフト要因に影響されずに確定的である。まだ市場に参入していない企業は需要のシフトを表す確率変数が企業価値最大になるような水準に到達するまでに待ち続ける。このような最適参入水準を求め、参入前および参入後の企業価値の評価式を導出した。モデルの特性を調べるため、数値例を用いていくつかのケースについて分析を行った。企業の最適参入水準は最終的に参入する企業の総数に関係なしに一定であるが、同一の確率変数の水準の下では、参入前の企業価値と参入後の企業価値は最終的に参入する企業数が多いほど低くなる。

このモデルでは、確率的需要のシフトに対し企業は利潤が最大になるように生産量を絶えずに調整することで、市場に参入した企業数が増えても、利潤が負になることがないので、最初に参入する企業の企業価値は零とならない。

第7章　競争状況下における投資決定

7.1　はじめに

不確実性下における企業の投資決定について、単独の企業の意思決定問題として議論する場合が多い。競争産業における企業の参入問題について、Dixit and Pindyck[18] の 9 章では、2 企業の参入モデルを例に、同質の 2 企業が相手企業の行動を考慮した市場への参入問題と、予め参入順序が特定された同質の 2 企業の先行企業と後続企業の市場への参入問題を分析した。Baba[2] は Dixit and Pindyck[18] の 2 企業参入モデルを銀行の貸し出し市場での競争問題に応用し、銀行の貸し出し決定について分析した。Joaquin and Butler[25] は違ったコスト構造を持つ 2 企業の参入問題について分析し、参入の順序はコストによって決定されることを証明した。これらの研究は競争状況下における市場への参入問題を分析することに多くの示唆を与えるが、2 企業の参入問題に限定されている。第 6 章では、多くの企業が順次に参入する場合について議論したが、この章では、コスト構造が異なる多くの企業が競争する場合について参入の順序を分析する。Joaquin and Butler[25] では線形的需要関数を考え、そこでの競争均衡を分析しているが、ここでは需要の価格弾力性が一定の需要関数の下で、競争均衡での参入問題について分析する。

7.2　モデル

多数の企業が同質の製品を供給する競争市場を考える。製品の逆需要関数が

$$P = X_t Q^{-\varepsilon} \tag{7.1}$$

であるとする。P は価格で、Q は総供給量である。需要の価格弾力性 $\eta = 1/\varepsilon > 1$ とする。需要の確率的シフト要因 X_t の変動が

$$dX_t = \mu X_t dt + \sigma X_t dW_x \tag{7.2}$$

に従うとする。μ と σ は定数で、W_x はウィーナー過程である。

確率的割引因子を

$$dZ_t = -rZ_t - \sigma_z Z_t dW_z \tag{7.3}$$

で表す。r と σ_z は定数で、W_z はウィーナー過程である。$dW_x dW_z = \rho dt$ とする。

7.2.1　競争状況下での企業価値

最終的に市場に参入する企業総数を N とし、それぞれの企業を企業 $i(i=1,\cdots,N)$ と呼ぶ。各企業の単位当たり生産コストは生産量に関係なく一定であると仮定し、企業 i の単位当たりの生産コストが c_i であるとし、$c_1 < c_2 < \cdots < c_N$ であるとする。

企業は初期投資コスト I を支出して市場に参入すると、その後は追加的投資なしに自由に生産量を調整することが可能であるとし、市場に参入した企業は他の企業の生産量を所与として、利潤が最大になるように生産量を調整する。市場に参入している企業数が n で、$X_t = x$ のとき、市場に参入している企業 i の利潤は

$$\Pi_{n,i}(x) = \pi_{n,i} x^{\eta} \tag{7.4}$$

となる (付録を参照)。ここで、

$$\pi_{n,i} = \eta \left(1 - \frac{c_i(n-\varepsilon)}{C_n}\right)^2 \left(\frac{C_n}{n-\varepsilon}\right)^{1-\eta} \tag{7.5}$$

であり、C_n は市場に参入している企業の単位生産コストの和である。

市場に参入している企業数が n 社のままの場合、企業 i の将来の利潤の現在価値は

$$E_0\left[\int_0^{\infty} Z_t \pi_{n,i} X_t^{\eta} dt \mid X_0 = x, Z_0 = 1\right] = \frac{\pi_{n,i} x^{\eta}}{R} \tag{7.6}$$

となる（付録を参照)。ここで、

$$R = r - \frac{1}{2}\sigma^2 \eta(\eta - 1) - (\mu - \rho\sigma\sigma_z)\eta$$

である。$R > 0$ であれば、企業 i の企業価値は有限値になる。

現在、市場に参入している企業数が n で、将来さらに、他の企業が市場に参入する場合には、企業 i の企業価値は

$$V_{n,i}(x) = A_{n,i} x^{\beta} + \frac{\pi_{n,i} x^{\eta}}{R} \tag{7.7}$$

となる。以下では、これを参入後の企業価値と呼ぶ。$A_{n,i}$ は将来市場に参入する企業によって決まる係数で、β は二次方程式

$$f(\beta) = \frac{1}{2}\sigma^2 \beta(\beta - 1) + (\mu - \rho\sigma\sigma_z)\beta - r = 0$$

の正根である。企業価値が有限な値になるためには、$R > 0$ でなければならないが、$\eta < \beta$ であれば、$R > 0$ となる。

7.2.2 競争状況下での参入決定

各企業は他の企業の参入を考慮したうえで、確率変数 X_t がある水準に達したときに参入する[1]。確率変数の参入水準は参入後に得られる利潤の現在価値（これを以下では参入前の企業価値）が最大になるように決める。この問題を解くために、まず、2企業からなる競争市場を考える。

2企業競争市場での参入決定

Joaquin and Btler[25] は2企業の参入問題について線形的需要関数を利用して議論しているが、ここでは、需要関数は (7.1) 式であると仮定する。企業1と企業2の生産コストがそれぞれ c_1 と c_2 で、$c_1 < c_2$ とする。$X_0 = x$ のとき、企業 $i(i = 1, 2)$ が $x_e > x$ で $n(n = 1, 2)$ 番目に市場に参入する場合, 企業 i の参入前の企業価値は

$$W_{n,i}(x; x_e) = \left(\frac{x}{x_e}\right)^{\beta} [V_{n,i}(x_e) - I] \tag{7.8}$$

となる。

$$w_{n,i}(x_e) = [V_{n,i}(x_e) - I]/x_e^{\beta}$$

とすれば、$W_{n,i}(x; x_e) = x^{\beta} w_{n,i}(x_e)$ となるので、$W_{n,i}(x; x_e)$ を最大する x_e を求める代わりに $w_{n,i}(x_e)$ を最大にする x_e を求めればよい。

$w_{n,i}(x_e)$ は

$$x^*_{n,i} = \left(\frac{\beta}{\beta - \eta} \frac{RI}{\pi_i(n)}\right)^{\varepsilon} \tag{7.9}$$

で最大になる。これは、他の企業のことを考えないで、市場への参入順番だけを考慮したときの参入水準である。

企業 i が2番目に参入するときには、次に参入する企業がないので、$A_{2,i} = 0$ となり、参入後の企業価値は

$$V_{2,i}(x) = \pi_{2,i} x^{\eta}/R$$

となる。企業1が1番目に市場に参入していると、$x^*_{2,2}$ で企業2が2番目の企業として市場に参入する。この時点で、企業1の企業価値は

$$A_{1,1}(x^*_{2,2})^{\beta} + \pi_{1,1}(x^*_{2,2})^{\eta}/R = \pi_{2,1}(x^*_{2,2})^{\eta}/R \tag{7.10}$$

となるので、

$$A_{1,1} = \frac{\pi_{2,1} - \pi_{1,1}}{R}(x^*_{2,2})^{\eta - \beta} \tag{7.11}$$

---

[1] このモデルでは、市場への参入企業数が決まると製品の均衡価格は確率変数 X_t と独立に確定的な値になるので、X_t を市場全体の需要量で表現できるが、以下では参入水準は X_t の値で表現する。

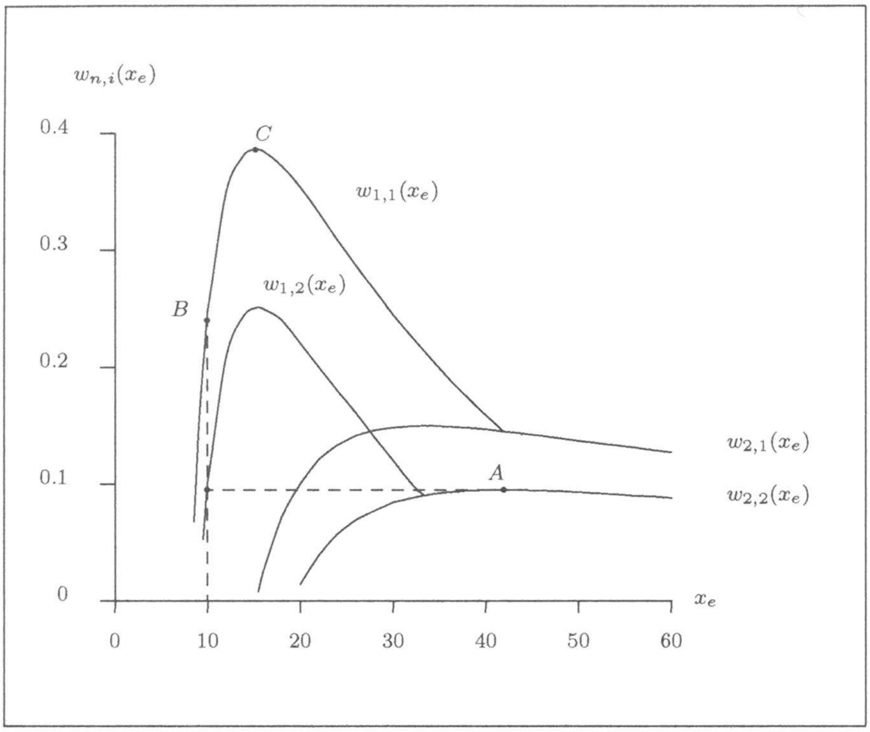

図 7.1: 競争状況での参入 $N = 2$

となる。同様に、企業2が最初に市場に参入しているときには、

$$A_{1,2} = \frac{\pi_{2,2} - \pi_{1,2}}{R}(x^*_{2,1})^{\eta-\beta} \tag{7.12}$$

となる。

$w_{n,i}(x_e)$ を図 7.1 で示している[2]。企業2が2番目に市場に参入するならば、X_t が $x^*_{2,2}$ のとき、市場に参入すれば参入前の企業価値が最大になり、これが A 点である。これに対し、

$$x_{1,2} = \inf[x_e : w_{1,2}(x_e) = w_{2,2}(x^*_{2,2})] \tag{7.13}$$

とすると、$x_e > x_{1,2}$ で企業2が最初に市場に参入したほうが2番目に参入するより有利となる。X_t が $x_{1,2}$ に達する前に企業1の参入前企業価値が最大になる場合には、企業1は参入前企業価値が最大になる参入水準で市場に参入する。この場合、企業2は $x_{1,2}$ で最初に市場に参入することはない。もし、$w_{1,1}(x_e)$ を最大にする点 C に対応する x_e の値 $x^*_{1,1}$ が $x_{1,2}$ より大きければ、企業1は企業2が先に参入することを阻止するため、X_t が $x_{1,2}$ に達したときに企業1は市場に参入する。これが B 点である。競争状況で企業1の参入水準は $x_{1,1} = \min[x^*_{1,1}, x_{1,2}]$ となる。

[2]図 7.1 のグラフの計算に用いたパラメータ値は次節の表 7.1 にある。ここで、$c_1 = 10$、$c_2 = 11$ である。

このことから、企業のコスト構造の違いから、企業の市場に参入する順序がきまり、投資コストが一致の場合には、生産コストが低い企業から順次市場に参入することになる。

N 企業競争市場での参入決定

競争する企業数が N の場合について、参入水準を考察する。

企業が生産コストの小さい順に市場に参入するとすれば、企業 m が m 番目に市場に参入し、

$$w_{m,m}(x_e) = [V_{m,m}(x_e) - I]/x_e^{\beta} \tag{7.14}$$

となる。なお、この場合 $C_m = \sum_{j=1}^{m} c_j$ となる。以下では C_m をこのように定義する。$w_{m,m}(x_e)$ は

$$x^*_{m,m} = \left(\frac{\beta}{\beta - \eta}\frac{RI}{\pi_{m,m}}\right)^{\varepsilon} \tag{7.15}$$

で最大になる。

企業 $m+1$ が m 番目に市場に参入した場合の企業 $m+1$ の企業価値は

$$V_{m,m+1}(x) = A_{m,m+1}x^{\beta} + \frac{\pi_{m,m+1}x^{\eta}}{R} \tag{7.16}$$

となる。ここで、

$$\pi_{m,m+1} = \eta\left(1 - \frac{c_{m+1}(m-\varepsilon)}{\hat{C}_m}\right)^2\left(\frac{\hat{C}_m}{(m-\varepsilon)}\right)^{1-\eta}$$

であり、$\hat{C}_m = C_{m-1} + c_{m+1}$ である。

企業 $m+1$ が x_e で m 番目に市場に参入する場合

$$w_{m,m+1}(x_e) = [V_{m,m+1}(x_e) - I]/x_e^{\beta} \tag{7.17}$$

となる。企業 $m+1$ について、(7.13) 式と同じように、

$$x_{m,m+1} = \inf[x_e : w_{m,m+1}(x_e) = w_{m+1,m+1}(x_{m+1,m+1})] \tag{7.18}$$

と定義すると、企業 m は、企業 $m+1$ が m 番目に参入しないようにするために、$x_{m,m+1}$ が存在するときには、$x_{m,m} = min[x_{m,m+1}, x^*_{m,m}]$ で市場に参入し、$x_{m,m+1}$ が存在しないときには $x^*_{m,m}$ で市場に参入する。

(7.18) 式の $x_{m,m+1}$ を求めるためには、関数 $w_{m,m+1}$ と $w_{m+1,m+1}$ が必要となるが、これらの関数は $V_{m,m+1}$ と $V_{m+1,m+1}$ に依存し、関数 $V_{m,m+1}$ と $V_{m+1,m+1}$ は係数 $A_{m,m+1}$ と $A_{m+1,m+1}$ に依存する。そして、これらの係数は $m+1$ 番目あるいは $m+2$ 番目

以降の企業の参入の仕方に依存する。そこで、参入の順序が生産コストの低い順で、X_t の値が $x_{1,1}, x_{2,2,}, \cdots, x_{N,N}$ に達したときに1から N までの企業が順次市場に参入するときの係数を $A_{m,i}(m=1,2,\cdots,N; i=1,\cdots,m)$ とする。これに対して、企業 $m+1$ が m 番目に市場に参入し、他は生産コストの低い順に市場に参入するときの企業 $m+1$ の企業価値関数 $V_{m,m+1}$ の係数を $A_{m,m+1}$ とする。このときの参入水準は $x_{1,1}, \cdots, x_{m-1,m-1}, x_{m,m+1}, x_{m+1,m}, x_{m+2,m+2}, \cdots, x_{N,N}$ である。$x_{m,m+1}$ は (7.18) 式で決まり、$x_{m+1,m}$ は企業 $m+2$ が $m+1$ 番目に市場に参入しないような水準であるから

$$x_{m+1,m} = min[x^*_{m+1,m}, x_{m+1,m+2}]$$

となる。

生産コストの低い順に企業が市場に参入するときには、既に市場に参入している企業 i の企業価値は企業 m が市場に参入した時点で、$V_{m-1,i}$ であるとともに $V_{m,i}$ でもあるから

$$A_{m-1,i}x^\beta_{m,m} + \frac{\pi_{m-1,i}}{R}x^\eta_{m,m} = A_{m,i}x^\beta_{m,m} + \frac{\pi_{m,i}}{R}x^\eta_{m,m} \tag{7.19}$$

となり、これから

$$A_{m-1,i} = A_{m,i} + \frac{\pi_{m,i} - \pi_{m-1,i}}{R}x^{\eta-\beta}_{m,m} \tag{7.20}$$

となる。$A_{N,i}=0$ であるから

$$A_{m,i} = \frac{1}{R}\sum_{j=m}^{N-1}(\pi_{j+1,i} - \pi_{j,i})x^{\eta-\beta}_{j,j} \tag{7.21}$$

となる。

企業 $m+1$ が m 番目に市場に参入し、企業 m が $m+1$ 番目に市場に参入するときには、企業 m が参入水準 $x_{m+1,m}$ で市場に参入した時点での企業 $m+1$ の企業価値は $V_{m,m+1}(x_{m+1,m})$ であるとともに、$V_{m+1,m+1}(x_{m+1,m})$ でもあるから

$$A_{m,m+1}x^\beta_{m+1,m} + \frac{\pi_{m,m+1}}{R}x^\eta_{m+1,m} = A_{m+1,m+1}x^\beta_{m+1,m} + \frac{\pi_{m+1,m+1}}{R}x^\eta_{m+1,m} \tag{7.22}$$

となる。これから

$$A_{m,m+1} = A_{m+1,m+1} + \frac{\pi_{m+1,m+1} - \pi_{m,m+1}}{R}x^{\eta-\beta}_{m+1,m} \tag{7.23}$$

となる。$A_{m+1,m+1}$ は (7.21) 式から求められる。

図 7.2 は $N=5$ の場合、企業1から企業3までの各企業の参入水準を示している[3]。企業1は X_t が 9.93 に達すると市場に参入し、企業2は X_t が 39.70 に達すると市場に参入し、企業3は X_t が 109.51 に達すると市場に参入する（表 7.2 参照)。

[3]グラフの計算に用いたパラメータ値は次節の 7.1 にある。ここで、$c_1=10, c_2=11, c_3=12, c_4=13, c_5=14$ である。

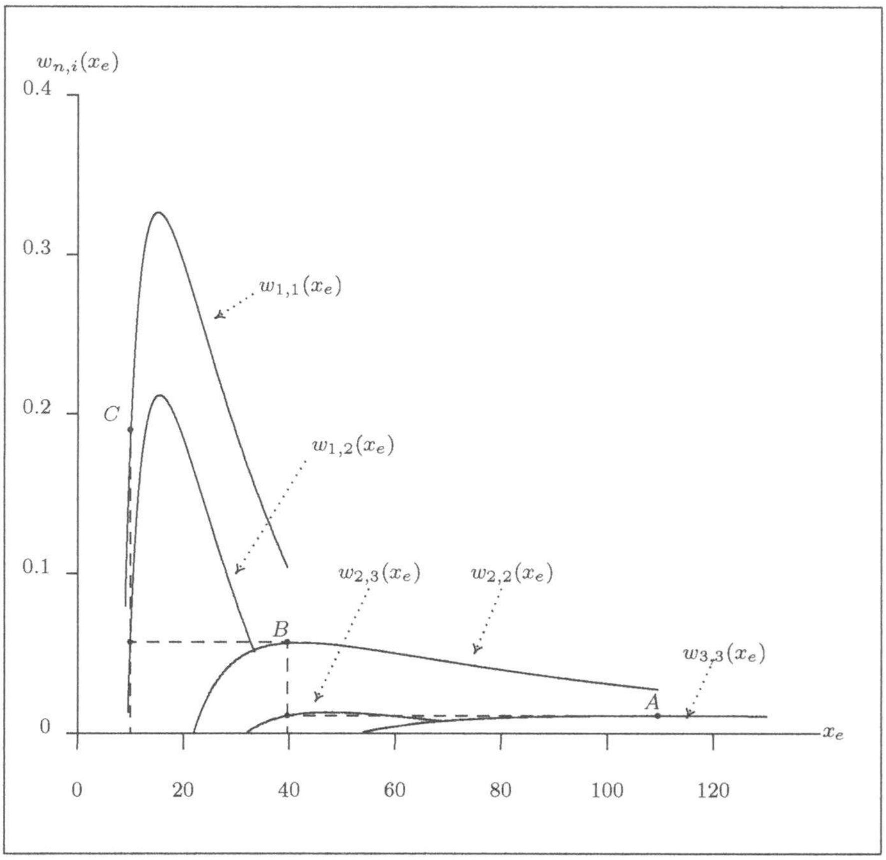

図 7.2: 競争状況での参入 $N = 5$

7.3 数値例

この節では具体的な数値例を用いて、競争する企業数が異なる場合に企業の参入水準と企業価値の変化を調べてみる。計算で利用したパラメータの値は表 7.1 でまとめた。計算の結果を表 7.2、表 7.3、表 7.4 で示している。

表 7.1: パラメータの値

パラメータ	値	パラメータ	値
σ	0.2	ε	0.8
μ	0.04	I	100
r	0.04	ρ	0.5
σ_z	0.4		

表 7.2: 参入水準と投資基準 (ケース 1)
($c_1 = 10, c_2 = 11, c_3 = 12, c_4 = 13, c_5 = 14$)

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$x_{1,1}$	15.161	9.929	9.927	9.927	9.927
$x_{2,2}$		41.944	39.700	39.700	39.700
$x_{3,3}$			109.506	109.506	109.506
$x_{4,4}$				353.408	353.408
$x_{5,5}$					4317.163
$V_{1,1}(x_{1,1})/I$	2.667	1.237	1.187	1.183	1.182

表 7.2 からわかるように、競争する企業が増えると、より低い X_t の水準で企業が市場に参入する傾向があるが、単調に低下するではないことが次の例で示されている。この数値例では、$x_{3,4}$、$x_{4,5}$ が存在しないため、$x_{3,3} = x^*_{3,3}$、$x_{4,4} = x^*_{4,4}$、$x_{5,5} = x^*_{5,5}$ となる。これは、企業 4 、企業 5 の生産コストがかなり割高のためである。

表 7.3 は各企業の生産コストの差が小さい例である。競争する企業が増えると、それよりコストの低い企業の参入時の X_t の水準が変化するが、必ずしも参入水準が低下するのではない。

表 7.2 と表 7.3 は生産コストが均等に高くなっている場合を示したが、表 7.4 は生産コスト高い企業の間の差が小さくなり、ある上限に接近するような場合[4]を示している。この場合、生産コストが割高の企業が増えると、生産コストの低い企業の参入水準にわずかな影響を与える。

[4]ここではそれぞれ企業の生産コストを $c_n = \bar{c} - ab^{-(n-1)}$ で表し、この数値例では $\bar{c} = 12, a = 2, b = 2$ である。

表 7.3: 参入水準と投資基準 (ケース 2)

$(c_1 = 10, c_2 = 10.1, c_3 = 10.2, c_4 = 10.3, c_5 = 10.4)$

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$x_{1,1}$	15.161	9.393	10.624	10.179	10.299
$x_{2,2}$		37.375	25.931	28.753	27.908
$x_{3,3}$			71.007	54.746	57.895
$x_{4,4}$				116.744	98.761
$x_{5,5}$					178.494
$V_{1,1}(x_{1,1})/I$	2.667	1.119	1.056	1.030	1.024

表 7.4: 参入水準と投資基準 (ケース 3)

$(c_1 = 10, c_2 = 11, c_3 = 11.5, c_4 = 11.75, c_5 = 11.875)$

	$N=1$	$N=2$	$N=3$	$N=4$	$N=5$
$x_{1,1}$	15.161	9.929	10.002	10.024	10.027
$x_{2,2}$		41.944	32.145	31.935	31.908
$x_{3,3}$			92.691	78.969	78.226
$x_{4,4}$				170.202	149.562
$x_{5,5}$					273.080
$V_{1,1}(x_{1,1})/I$	2.667	1.237	1.126	1.110	1.105

各表の最後の行は企業 1 が参入水準 $x_{1,1}$ で参入した場合の企業価値と投資コストの比（投資基準と呼ぶことにする）を表している。今まで、単独の企業の投資決定問題としての議論では、投資の実行時に高い企業価値が要求されると主張するが、これが $N=1$ の場合であり、競争企業数の増加しより、その比が急速に減少し、企業間の生産コスト差が小さい場合（ケース２）では１にかなり接近している。

7.4 結論

この章では、コスト構造が異なる多数の企業が同時に市場に参入しようと考える場合について、参入の順序を分析し、それぞれの企業の参入水準を求めた。まず２企業の競争市場について分析し、コスト構造が参入の順序を決定することと示し、これを基に N 企業の競争市場におけるそれぞれの企業の参入水準を求めた。数値例を用いて競争する企業数が異なる場合の各企業の参入水準と投資基準を３つのケースで分析した。生産コストが参入水準に与える影響が様々であることが明らかになった。競争する企業数の増加により、参入時の企業価値が減少し、参入時の企業価値と投資コス

トの比が１に接近する。これらの分析結果から、単独の企業として、あるいは単純な市場構造を仮定して企業の参入水準を企業価値を分析するのが不十分であることが明らかになった。

第8章　結論

本論文はリアル・オプションの先行研究を基に4つのテーマについて行った理論的研究をまとめた。それぞれのテーマにおいて研究の成果を上げたが、研究の第1ステップに過ぎない。この章は、論文の内容を簡単に回顧し、理論的貢献について触れ、これからの展開を示して、論文の締めくくりとしたい。

投資意思決定での最も基本的な問題である参入（投資）と撤退（廃業）の意思決定について、参入と撤退を同時に考える参入・撤退モデルを利用し、プロジェクトの運営に重要な指標となる収入と操業コストに着目し、投資コストとプロジェクトの残存価値が参入時と撤退時の収入と操業コストに比例するとし、参入と撤退の最適水準を求めた。一方的な参入モデル、一方的な撤退モデルと比較すると参入・撤退モデルの方が参入水準が低く、撤退水準が高くなることを明らかにし、プロジェクトの価値が高く評価されることを示した。この研究からプロジェクトを柔軟に運営するほど、プロジェクトの価値が高くなることが分かる。

段階的に実施されるプロジェクトの評価についての先行研究では、単純なオプション評価モデルを利用して議論することが多い。ここでは、複合オプションの評価理論を投資機会が前後に依存するプロジェクトの評価に応用する。プロジェクトの投資実行時の収益状況により、複合オプションの評価モデルを直接に応用できないことがあるので、収益状況に対応する評価式を導出した。これを基に、プロジェクトの投資実行時点が確率的で、競争相手が存在する場合について、プロジェクトの評価を考え、投資の戦略を分析した。この研究では、リアル・オプション・アプローチが複雑な投資機会を評価し、戦略的投資意思決定が導かれるメリットが現れている。

リアル・オプション・アプローチによるプロジェクト評価の先行研究では、割引率を一定とする場合が多い。ここでは、確率的利子率を用いたプロジェクト評価法を考えた。プロジェクトからのキャッシュフローが確率的に変動するとし、投資コストがプロジェクトからのキャッシュフローと比例する場合について、評価法の基本的な枠組を確立した。これを基に、投資コストとキャッシュフローがともに確率的に変動する場合のプロジェクト評価法を考え、2重積分の形でプロジェクトの評価式を導出した。解析的に単純な形の評価式を得られなかったが、数値計算を用いればプロジェクトの価値を計算することができた。数値例でいくつかのパラメータについて感度分析を行い、プロジェクトを評価する際、利子率の不確実性を無視できないことが明らかになった。

リアル・オプション・アプローチによる投資決定についての先行研究では、他の企業を考慮することなく単独の企業の意思決定問題として扱うのか、あるいは単純な競争構造を仮定して完全競争および２企業の競争市場での意思決定問題として議論されてきた。ここでは、多数企業の競争市場での投資意思決定問題について考え、２つのタイプのモデルで議論した。需要の価格弾力性が一定の需要関数を考え、需要のシフト要因が確率的に変動し、すべての企業が他の企業の行動を認識した上で戦略的に行動する場合、そこでの均衡状態を分析し、その上で、まず、企業が次々と市場に参入する場合について、それぞれの企業の参入水準を求め、プロジェクトの評価について議論した。次に、コスト構造が異なる多数の企業が同時に参入を考える場合について、それぞれの企業の最適行動を分析し、それぞれの企業の参入水準を求め、コスト構造の違いが企業の参入順序を決定することを示した。多企業モデルでの分析手法を確立し、様々な競争状況を分析することが可能となった。両方のモデルにおいていくつかの競争条件の下で数値分析を行い、今までの企業数を１ないし２企業に限定した場合と異なる結論が得られた。プロジェクトを評価する際、競争の条件を適確に認識することの重要性が示された。

投資機会が常に存在し、企業は状況に応じて柔軟に投資を実施する。このような投資機会の評価はアメリカン・オプションの評価に類似する。リアル・オプション研究の文献では、このような投資機会の下で、投資の意思決定とプロジェクトの評価について、議論することが多い。この論文では、第２章、第６章と第７章はこのタイプのモデルである。他方、現実の世界では、将来時点である条件が実現した時のみ投資機会を得られるような状況も多く存在する。このような投資機会の評価はヨーロピアン・オプションの評価に類似するが、これまでそれほど議論されなかった。この論文の第３章、第４章と第５章がこのタイプのモデルを扱い、金融オプションの評価理論を応用すると同時に、リアル・オプションの特性に適応した評価手法を考えた。

資産評価の視点から、適切な割引率を使用することが重要である。リアル・オプション・アプローチでは、裁定価格理論を応用し、割引率の問題を解決したケースが存在する。例えば、天然自然の開発プロジェクト評価の場合は、市場の価格情報を利用することで、容易にプロジェクトを評価できる。また、投資プロジェクトとリスクの構造を一致する資産の価格情報を利用できる。しかし、新製品の研究開発プロジェクトのように、新製品の投資機会がまだ存在しないような状況では、投資者のリスク選好によって評価される。これはリアル・オプション・アプローチだけではなく、その他の投資評価理論でも同様である。割引率については、この論文では直接に触れていないが、これについての考え方を研究に取り入れた。第５章と第７章は確率的割引因子を使用している。確率的割引因子モデルの研究が今後の研究課題のひとつとなる。

企業が新しいプロジェクトに投資する際、資本の調達が現実の問題となる。例えば、資本予算の制限があるときに、企業は利益を最大限に実現するような投資規模を達成できない場合もありうる。このような制約条件が企業の投資意思決定、プロジェクト価値にどのような影響を与えるのかについては議論に値する。また、債務と株主資本

の比率によって租税効果を考慮した資本の調達の下でのプロジェクトの評価などが今後の展開となる。第６章と第７章で議論したように、現実では企業が複雑な状況での投資決定を行わなければならない。ゲーム論的なアプローチをリアル・オプション理論の研究に応用することで、様々な状況での意思決定の分析が可能となり、今後の研究の展開方向の１つとなる。リアル・オプション理論による実例の研究、実証研究が比較的最近の研究テーマである。実例を用いての研究、理論モデルを現実のデータで検証することも今後の展開となる。

付 録A　第2章の付録

A.1　臨界値の大小関係についての証明

証明を明快にするため、生産に参入していないプロジェクトの期待現在価値を

$$V(X) = BX^{\beta}$$

で表し、生産に参入しているプロジェクトの期待現在価値を

$$W(X) = AX^{\alpha} + CX$$

で表す。ここで、$A, B > 0$ で、$\alpha < 0$、$\beta > 1$ である。

投資コストを I とし、サルベージ価値を S とする。裁定の機会を排除するため、$I > S$ でなければならない。

参入・撤退モデルでの参入の臨界値を X_H とし、撤退の臨界値を X_L とすると

$$BX_H^{\beta} = AX_H^{\alpha} + CX_H - I \tag{A.1}$$

$$\beta BX_H^{\beta} = \alpha AX_H^{\alpha} + CX_H \tag{A.2}$$

$$BX_L^{\beta} = AX_L^{\alpha} + CX_L - S \tag{A.3}$$

$$\beta BX_L^{\beta} = \alpha AX_L^{\alpha} + CX_L \tag{A.4}$$

の4本の方程式が得られる。ただし、プロジェクト・マネジメントの視点から (A.1) 式と (A.2) 式の変数 X_H の定義域は $\infty \geq X_H > X_L$、(A.3) 式と (A.4) 式の変数 X_L の定義域は $0 \leq X_L < X_H$ でなければならない。

(A.1) 式と (A.2) 式から

$$(\beta - \alpha)AX_H^{\alpha} + (\beta - 1)CX_H - \beta I = 0 \tag{A.5}$$

となり、(A.3) 式と (A.4) 式から

$$(\beta - \alpha)BX_L^{\beta} + (\alpha - 1)CX_L - \alpha S = 0 \tag{A.6}$$

となる。

(A.5) 式と (A.6) 式からそれぞれ次の関数を定義する。

$$F(X) = (\beta - \alpha)AX^{\alpha} + (\beta - 1)CX - \beta I \tag{A.7}$$

$$G(X) = (\beta - \alpha)BX^{\beta} + (\alpha - 1)CX - \alpha S \tag{A.8}$$

したがって、$F(X_H) = 0$、$G(X_L) = 0$ となる。(A.3) を利用すると

$$F(X_L) = -\beta(I - S) < 0$$

となる。$\lim_{X\to 0} F(X) = \infty$、$\lim_{X\to\infty} F(X) = \infty$、$F''(X) = \alpha(\alpha-1)(\beta-\alpha)AX^{\alpha-2} > 0$ であるから、$F(X_L) = -\beta(I - S) < 0$ により、$F(X)$ は X 軸（横軸）と交差する凸曲線である。その交点のどちかが X_H である。

同様に、(A.1) 式を利用すると

$$G(X_H) = \alpha(I - S) < 0$$

となる。$\lim_{X\to 0} G(X) = -\alpha S$、$\lim_{X\to\infty} G(X) = \infty$、$G''(X) = \beta(\beta - 1)(\beta - \alpha)BX^{\beta-2} > 0$ であるから $G(X_H) = \alpha(I - S) < 0$ より、$G(X)$ は X 軸（横軸）とで交差する凸曲線である。その交点のどちかが X_L である。

ここで、$F(X)$ は $\infty \geq X > X_L$ の範囲でのみ定義され、$G(X)$ は $0 \leq X < X_H$ の範囲でのみ定義されいるので、$X_H > X_L$ であるから、図 A.1 で示したように[1]、$F(X)$ と $G(X)$ は実線部分の値をとり、$F(X)$ は正の傾きで横軸と X_H で交差し、$G(X)$ は負の傾きで横軸と X_L で交差する。

他方、一方的参入モデルでの臨界条件を考えてみる。一方的な参入モデルでの参入の臨界点を X_{H0} とすると、

$$BX_{H0}^{\beta} = CX_{H0} - I \tag{A.9}$$

$$\beta BX_{H0}^{\beta} = CX_{H0} \tag{A.10}$$

となる。この 2 本の方程式から

$$X_{H0} = \frac{\beta}{\beta - 1}\frac{I}{C}$$

となる。したがって、

$$F(X_{H0}) = (\beta - \alpha)AX_{H0}^{\alpha} > 0$$

となる。図 A.1 から分かるように、$X > X_H$ ときのみ $F(X) > 0$ となるので、$X_{H0} > X_H$ となる。

同様に、一方的な撤退モデルでの撤退の臨界値を X_{L0} とすると

$$AX_{L0}^{\alpha} + CX_{L0} - S = 0 \tag{A.11}$$

[1] グラフの作成には標準ケースのパラメータ値を用いた。

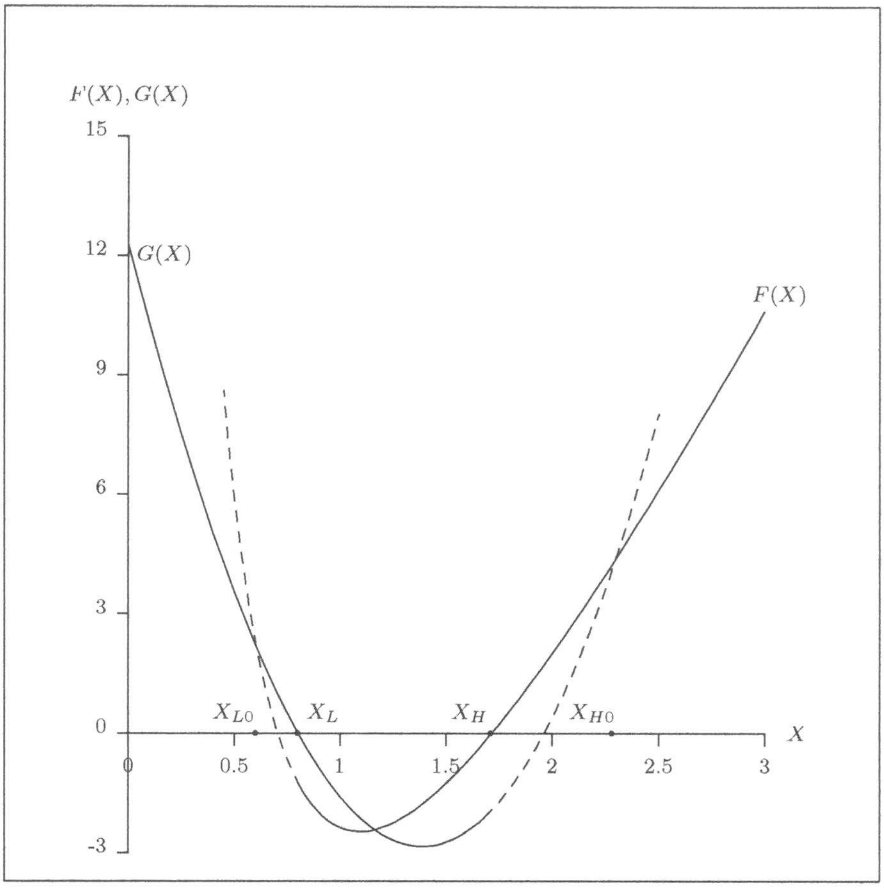

図 A.1: 参入と撤退の臨界条件

$$\alpha A X_{L0}^{\alpha} + C X_{L0} = 0 \tag{A.12}$$

となり、

$$X_{L0} = \frac{\alpha}{\alpha - 1}\frac{S}{C}$$

となる。したがって、

$$G(X_{L0}) = (\beta - \alpha) B X_{L0}^{\beta} > 0$$

となる。図 A.1 から分かるように、$X < X_L$ ときのみ $G(X) > 0$ となるので、$X_{L0} < X_L$ となる。

付 録B　第4章の付録

B.1　補題1の証明

$Z = X/Y$ とし、$\ln X = x, \ln Y = y, \ln Z = z$ とすると、

$$E(\max(X - Y, 0)) = E(e^y(e^z - 1)1_{z>0})$$

と書ける。ここで、$1_{z>0}$ は指標関数である。

ϵ を平均が0、分散が σ_ϵ^2 の z と独立の正規確率変数とし、$y = \alpha + \beta z + \epsilon$ とすると、

$$\begin{aligned}&E(e^y(e^z - 1)1_{z>0})\\&\quad = \exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2)[E(\exp((1+\beta)z)1_{z>0}) - E(\exp(\beta z)1_{z>0})]\end{aligned}$$

となる。

x, y, z の平均をそれぞれ μ_x, μ_y, μ_z、分散をそれぞれ $\sigma_x^2, \sigma_y^2, \sigma_z^2$、共分散をそれぞれ σ_{xy}, σ_{yz} とする。

平均が μ、分散が σ^2 の正規確率変数 w と定数 k について、

$$E(e^{kw}1_{w>0}) = \exp(k\mu + k^2\sigma^2/2)N((\mu + k\sigma^2)/\sigma)$$

であるから

$$\begin{aligned}&\exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2)E(\exp((1+\beta)z)1_{z>0})\\&\quad = \exp(\alpha + (1+\beta)\mu_z + (1+\beta)^2\sigma_z^2/2 + \sigma_\epsilon^2/2)N((\mu_z + (1+\beta)\sigma_z^2)/\sigma_z)\end{aligned}$$

となる。

$$E[\exp(\alpha + (1+\beta)z + \epsilon)] = \exp(\alpha + (1+\beta)\mu_z + (1+\beta)^2\sigma_z^2/2 + \sigma_\epsilon^2/2)$$

であり、$x = \alpha + (1+\beta)z + \epsilon$ であるから

$$E[\exp(\alpha + (1+\beta)z + \epsilon)] = E(X)$$

となる。

$\sigma_{yz} = \beta\sigma_z^2$ であり、$\sigma_{zy} = \sigma_{xy} - \sigma_y^2$ であるから、

$$\begin{aligned}\mu_z + (1+\beta)\sigma_z^2 &= \mu_x - \mu_y + \sigma_{xy} - \sigma_y^2 + \sigma_z^2 \\ &= \mu_x + \sigma_x^2 - (\mu_y + \sigma_y^2) + \sigma_z^2/2\end{aligned}$$

となる。

したがって、

$$\exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2)E(\exp((1+\beta)z)1_{z>0}) = E(X)N(d)$$

となる。

同様に

$$\begin{aligned}&\exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2)E(\exp(\beta z)1_{z>0}) \\ &\quad = \exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2 + \beta\mu_z + \beta^2\sigma_z^2/2)N((\mu_z + \beta\sigma_z^2)/\sigma_z)\end{aligned}$$

となるので、

$$\exp(\alpha + \beta\mu_z + \beta^2\sigma_z^2/2 + \sigma_\epsilon^2/2) = E[\exp(\alpha + \beta z + \epsilon)]$$

であり、$y = \alpha + \beta z + \epsilon$ であるから

$$\exp(\alpha + \beta\mu_z + \beta^2\sigma_z^2/2 + \sigma_\epsilon^2/2) = E(Y)$$

となる。

$$(\mu_z + \beta\sigma_z^2)/\sigma_z = ((\mu_z + (1+\beta)\sigma_z^2)/\sigma_z) - \sigma_z$$

を利用すると

$$\exp(\alpha + \sigma_\epsilon^2/2)E(\exp(\beta z)1_{z>0}) = E(Y)N(d - \sigma_z)$$

となる。　証明終

付 録 C　第 5 章の付録

C.1　補題 2 の証明

第 4 章の付録を参照。

C.2　補題 3 の証明

対数正規確率変数 X と Y について、$\ln X = x, \ln Y = y$ とする。正規確率変数 x と y の平均をそれぞれ μ_x, μ_y、分散をそれぞれ σ_x^2, σ_y^2、共分散を σ_{xy} とする。定数 $\psi = \ln \Psi$ とする。2 変量確率変数の性質から、

$$E(x|y=\psi) = \mu_x + \beta(\psi - \mu_y),\ \mathrm{var}(x|y=\psi) = \sigma_x^2 - \beta^2\sigma_y^2$$

となる。ここで、

$$\beta = \sigma_{xy}/\sigma_y^2$$

である。したがって、

$$\begin{aligned} E(\exp(x)|y=\psi) &= \exp(E(x|y=\psi) + \mathrm{var}(x|y=\psi)/2) \\ &= \exp(\mu_x + \sigma_x^2/2 + \beta\psi - (\beta\mu_y + \beta^2\sigma_y^2/2)) \\ &= E(X)\Psi^\beta / E(Y^\beta) \end{aligned}$$

となる。　証明終

付 録D　第6章の付録

D.1　命題7の証明

$q_i(i=1,2,\ldots,n)$ が企業 i の均衡生産量であるならば、(6.1) 式と (6.3) 式から

$$\frac{\partial \Pi_i}{\partial q_i} = P - c_i - \varepsilon \frac{P}{Q} q_i = 0 \tag{D.1}$$

が成り立つ。(D.1) 式を i について合計すると、$n(P-\bar{c}) - \varepsilon P = 0$ となり、均衡価格は

$$P = \frac{\bar{c}}{1-\varepsilon/n} \tag{D.2}$$

となる。企業 i の市場占有率 $y_i = q_i/Q$ は (D.1) 式から

$$y_i = \eta(1 - c_i/P) \tag{D.3}$$

となる。

$$\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/n} \leq \frac{c_i}{\bar{c}} \leq \frac{1}{1-\varepsilon/n}$$

であれば、(D.3) 式の y_i は $0 \leq y_i \leq 1$ となる[1]。

(6.1) 式と (D.1) 式から、$X_t = x$ のときの企業 i の利潤は

$$\Pi_i = \varepsilon y_i^2 P^{1-\eta} x^\eta \tag{D.4}$$

となる。

幾何ブラウン運動の性質から

$$E_0[X_t^\eta \mid X_0 = x] = x^\eta \exp\{[\mu\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta-1)]t\}$$

であるから

$$\begin{aligned} & E_0\left[\int_0^\infty \pi_i X_t^\eta e^{-rt} dt \mid X_0 = x\right] \\ = \ & \pi_i x^\eta \int_0^\infty \exp\{[\mu\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta-1) - r]t\} dt \\ = \ & \pi_i x^\eta / [r - \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta-1) - \mu\eta] \end{aligned} \tag{D.5}$$

[1] ここで考えている寡占的競争市場は、この条件を満たしていると仮定している（脚注 2 参照）。

となる。期待値が有限の値になるように、$R = r - \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta-1) - \mu\eta > 0$ であると仮定する。（証明終）

D.2　参入順序と参入水準の関係についての証明

企業 j が n 番目に市場に参入し、企業 k が $n+1$ 番目に市場に参入する場合を考える。命題 1 から企業 j について

$$\pi_j(n) = \varepsilon y_j(n)^2 P(n)^{1-\eta}$$

となる。ここで

$$y_j(n) = \eta(1 - \frac{c_j}{P(n)}),$$

$$P(n) = \frac{n\bar{c}}{n-\varepsilon}$$

であり、$\bar{c} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}$ である。$y_i(n)$ と $P(n)$ を $\pi_j(n)$ に代入し、整理すると

$$\pi_j(n) = \eta\left(\frac{n\bar{c}-(n-\varepsilon)c_j}{n-\epsilon}\right)^2\left(\frac{n-\varepsilon}{n\bar{c}}\right)^{\eta+1} \tag{D.6}$$

となる。

(D.6) 式について対数をとり、さらに c_j について微分すると

$$\frac{\partial \mathrm{ln}\pi_j(n)}{\partial c_j} = 2\frac{1-(n-\varepsilon)}{n\bar{c}-(n-\varepsilon)c_j} - (\eta+1)\frac{1}{n\bar{c}} \tag{D.7}$$

となる。市場占有率 $y_j(n)$ の内点解の条件から $c_j/(n\bar{c}) < 1/(n-\varepsilon)$ となるので、$n\bar{c} > (n-\varepsilon)c_j$ である。したがって、

$$\frac{\partial \mathrm{ln}\pi_j(n)}{\partial c_j} < 0$$

とあり、$\pi_j(n)$ は c_j の減少関数である。

c_k が c_j に等しいと仮定したときの企業 k についての $\pi_k(n+1)$ を $\hat{\pi}_k(n+1)$ で表すと、

$$\hat{\pi}_k(n+1) = \eta\left(\frac{n\bar{c}-(n-\varepsilon)c_j}{n+1-\varepsilon}\right)^2\left(\frac{n+1-\varepsilon}{n\bar{c}+c_j}\right)^{\eta+1} \tag{D.8}$$

と書ける。$\pi_k(n+1)$ は c_k の減少関数であり、$c_k > c_j$ であれば、$\hat{\pi}_k(n+1) > \pi_k(n+1)$ である。

$$\bar{\pi_j}(n+1) = \left(\frac{n\bar{c}-(n-\varepsilon)c_j}{n+1-\varepsilon}\right)^2\left(\frac{n+1-\varepsilon}{(n+1)\bar{c}}\right)^{\eta+1} \tag{D.9}$$

とし、生産コストが低い企業から順に参入するので、$n\bar{c}+c_j > (n+1)\bar{c}$ であり、$\hat{\pi}_k(n+1) < \bar{\pi}_j(n+1)$ となる。(D.6) 式の右辺と (D.9) 式の右辺の異なる所を m で表すと

$$\pi_j(n) = \eta\left(\frac{n\bar{c}-(n-\varepsilon)c_j}{m-\epsilon}\right)^2\left(\frac{m-\varepsilon}{m\bar{c}}\right)^{\eta+1} \tag{D.6'}$$

となる。(D.6') 式について対数をとり、m を連続変数として、m について微分すると

$$\frac{\partial \ln n\pi_j(n)}{\partial m} = \frac{1+\varepsilon-2m}{m(m-\varepsilon)} \tag{D.10}$$

となる。$m \geq 1$ で $\partial \ln n\pi_j(n)/\partial m < 0$ となり、$\pi_j(n)$ は m の減少関数である。したがって、$\pi_j(n) > \bar{\pi}_j(n+1)$ である。

上の議論を総合すると、次の関係式が成り立つ。

$$\pi_k(n+1) < \hat{\pi}_k(n+1) < \bar{\pi}_j(n+1) < \pi_j(n)$$

投資コストがすべての企業について等しく I とすると、生産コストが低い企業から順次に参入した場合、$I/\pi_j(n) < I/\pi_k(n+1)$ となり、$x_n < x_{n+1}$ が成り立つ。

付 録 E　第 7 章の付録

E.0.1 (7.4) 式の導出

n 社の企業が市場に参入したときに、$q_i(i = 1, 2, \ldots, n)$ を企業 i の均衡生産量とすると、企業 i の利潤は

$$\Pi_{n,i}(x) = (P - c_i)q_i \tag{E.1}$$

となる。$P = xQ^{-\varepsilon}$ であり、Q は n 社の企業の総供給量である。そのときに

$$\frac{\partial \Pi_{n,i}}{\partial q_i} = P - c_i - \varepsilon \frac{P}{Q} q_i = 0 \tag{E.2}$$

が成り立つ。(E.2) 式を i について合計すると、$nP - \sum_{i=1}^{n} c_i - \varepsilon P = 0$ となり、均衡価格は

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} c_i}{n - \varepsilon} \tag{E.3}$$

となる。企業 i の市場占有率 $y_i = q_i/Q$ は (E.2) 式から

$$y_i = \eta(1 - c_i/P) \tag{E.4}$$

となる。

$$\frac{1-\varepsilon}{n-\varepsilon} \leq \frac{c_i}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \leq \frac{1}{n-\varepsilon}$$

であれば[1]、(E.4) 式の y_i は $0 \leq y_i \leq 1$ となる。

(E.1) 式と (E.2) 式から、$X_t = x$ のときの企業 i の利潤は

$$\Pi_{n,i}(x) = \varepsilon y_i^2 P^{1-\eta} x^{\eta} \tag{E.5}$$

となる。(E.3) 式と (E.4) 式を (E.5) 式に代入すると、(7.4) 式を得る。

E.0.2 (7.6) 式の導出

幾何ブラウン運動の性質から

$$X_t^{\eta} = X_0^{\eta} \exp\left[(\eta\mu - \frac{\eta}{2}\sigma^2)t + \eta\sigma \int_0^t dW_x\right]$$

[1] ここで考えている競争市場は、この条件を満たしていると仮定する。

$$Z_t = Z_0 \exp\left[(-r - \frac{1}{2}\sigma_z^2)t - \sigma_z \int_0^t dW_z\right]$$

となるので、

$$E_0[Z_t X_t^\eta \mid X_0 = x, Z_0 = 1] = x^\eta \exp\{[(\mu - \rho\sigma\sigma_z)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta - 1)]t\}$$

となる。これから

$$\begin{aligned}
& E_0\left[\int_0^\infty Z_t \pi_{n,i} X_t^\eta dt \mid X_0 = x, Z_0 = 1\right] \\
= \;& \pi_{n,i} x^\eta \int_0^\infty \exp\{[(\mu - \rho\sigma\sigma_z)\eta + \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta - 1) - r]t\}dt \\
= \;& \pi_{n,i} x^\eta / [r - \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta - 1) - (\mu - \rho\sigma\sigma_z)\eta] \qquad \text{(E.6)}
\end{aligned}$$

となる。期待値が有限の値になるように、$R = r - \frac{1}{2}\sigma^2\eta(\eta - 1) - (\mu - \rho\sigma\sigma_z)\eta > 0$ であると仮定する。

参考文献

[1] Amram, Martha, and Nalin Kulatilaka, 1999, *Real Options: Managing Strategic Investment in an Uncertain World*, Harvard Business School Press.（石原雅行・中村康治・吉田二郎・脇保修司訳、『リアル・オプション—経営戦略の新しいアプローチ—』、東洋経済新報社、2001）

[2] Baba, N., 2001, "Uncertainty, Monitoring Costs, and Private Banks' Lending Decisions in a Doupolistic Loan Market: A Game-Theoretic Real Option Approach," *Monetary and Economic Studies*, Vol. 19, No. 2, pp. 21-47, Institute for Monetary and Economic Studies, Bank of Japan.

[3] Berk, Jonathan B., Richard C. Green and Vasant Naik, 1999, "Optimal investment, growth options, and security returns," *The Journal of Finance*, Vol. 54, No. 5, pp. 1553-1607.

[4] Bjork, Tomas, 1998, *Arbitrage Theory in Continuous Times*, Oxford University Press.

[5] Black, Fischer, Myron Scholes, 1973, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities," *Journal of Political Economy*, Vol. 81, No. 3, pp. 637 − 653.

[6] Boyle, P., 1977, "Options: A Monte Carlo Approach," *Journal of Financial Economics*, Vol. 4, pp. 323-338.

[7] Brach, M., A., 2003, *Real Options in Practice*, John Wiley & Sons, Inc..

[8] Brennan, M., and E.. Schwartz, 1978, "Finite Difference Methods and Jump Processes Arising in the Pricing of Containgent Claims: A Systhesis," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 13, pp. 461-474.

[9] Brennan, M., and E. Schwartz, 1985, "Evaluating Natural Resource Investments," *Journal of Business*, Vol. 58, No. 2, pp. 135-157.

[10] Choi, Yoon K. & Soek Weon Lee, 2000, "Investment and Abandonment Decisions with Uncertain Price and Cost," *Journal of Business and Accounting*, Vol. 27, No. (1)&(2), pp. 195-213.

[11] Cochrane, John H., 2001, *Asset Pricing*, Princeton University Press.

[12] Copeland, Tom and Vladimir Antikarov, 2001, *Real Options, A Practitioner's Guide*, TEXERE Publishing Limited.（栃本克之監訳、『リアル・オプション—戦略フレキシビリティと経営意思決定—』、東洋経済新報社、2002）

[13] Cortazar, G., 2001, "Simulation and Numerical Methods in Real Options Valuation," in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real Options and Investment Under Uncertaity: Classical Readings and Recent Contributions*, pp. 601-620, The MIT Press.

[14] Cox, J., S. Ross and M. Rubinstein, 1979, "Option Pricing: A Simplified Aproach," *Journal of financial Economics*, Vol. 7, pp.229-264.

[15] Dixit, A., 1989, "Entry and Exit Decisions under Uncertainty," *Journal of Political Economy*, Vol. 97, no. 3, pp. 620-638.

[16] Dixit, A., 1991, "Investment and Hysteresis," *Journal of Economic Perspectives*, Vol. 6, pp. 107-132.

[17] Dixit, A. and R. S. Pindyk, 2000, "Expandability, Reversibility, and Optimal Choice," In M. Brennan and L. Trigoergis (eds.), *Project Flexibility, Agency, and Competition*, Oxford University Press.

[18] Dixit, A. and R. S. Pindyk, 1994, *Investment Under Uncertainty*, Princeton University Press.（川口有一郎訳、『投資決定理論とリアルオプション　—不確実性のもとでの投資—』、エコノミスト社、2002）

[19] Duffie, D., 1996, *Dynamic Asset Pricing Theory*, Princeton University Press.（山崎昭・桑名陽一・大橋和彦・本多俊毅訳、『資産価格の理論　—株式・債券・デリバティブのプライシング—』、創文社、1998）

[20] Geske, Robert, 1977, "The valuation of compound options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 12, pp. 63-81.

[21] Grenadier, S. R., 2002, "Option Exercise Game: An Application to the Equilibrium Investment Strategies of Firms," *The Review of Financial Studies*, Vol. 15, No. 3, pp. 691-721.

[22] Hull, John C., 2000, *Options, Futures, and Other Derivatives. Fourth Edition*, Prentice Hall.

[23] Ingersoll, J. E. Jr., and S. A. Ross, 1992, "Waiting To Invest: Investment and Uncertainty," *Journal of Business*, Vol. 65, No. 1, pp. 1-29.

[24] Jamshidian, Farshid, 1989, "An Exact Bond Option Formula," *Journal of Finance*, Vol. 44, No. 1, pp. 205-209.

[25] Joaquin, D. C., and K. C. Butler, 2000, "Competitive Investment Decisions," in Brennan, M., and L. Trigeorgis, ed., *Project Flexibility, Agency, and Competition*, Oxford University Press.

[26] Jorgenson, D. W., 1963, "Capital Theory and Investment Behavior," *American Economic Review*, Vol. 53, pp.247-259.

[27] Kemna, A., 1993, "Case Studies on Real Options," *Financial Management*, Vol. 22, No. 3, pp. 271-279; reprinted in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real Options and Investment Under Uncertaity: Classical Readings and Recent Contributions*, The MIT Press.

[28] Kester, W. C., 1984, "Today's Option for Tomorrow's Growth," *Harvard Business Review*, Vol. 62, No. 2, pp. 153-160.

[29] Kogut, B., and N. Kulatilaka, 1994, "Operating Flexibility, Global Manufacturing, and the Option Value of a Multi-National Network," *Management Science*, Vol. 40, No.1, pp. 123-139; reprinted in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real Options and Investment Under Uncertaity: Classical Readings and Recent Contributions*, The MIT Press.

[30] Kulatilaka, N., 1993, "The Value of Flexibility: The Case of a Dual-fuel Industrial Steam Boiler," *Financial Management*, Vol. 22, no. 3, pp. 271-280.

[31] Kulatilaka, N., and L.. Trigeorgis, 1994, "The General Flexibility to Switch: Real Option Revisited," *International Journal of Finance*, Vol. 6, No. 2, pp. 778-798.

[32] He, Hua, and R. S. Pindyck, 1992, "Investment in Flexible Capacity," *Journal of Economic Dynamics and Control*, Vol. 16, pp. 575-599.

[33] Leahy, J. V., 1993, "Investment in Competitive Equilibrium: the Optimality of Myopic Behavior," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 108, pp. 1105-1133.

[34] Luenberger, D. G., 1998, *Investment Science*, Oxford University Press.

[35] Majd, S., and R. Pindyck, 1987, "Time to build option value, and investment decisions," *Journal of Financial Economics*, Vol. 18, pp. 7-27.

[36] Margrabe, W. 1978, "The Value of an Option to Exchange One Asset for Anther," *Journal of Finance*, Vol. 33, pp. 177-186.

[37] McDonald, R. and D. Siegel, 1985, "Investment and the Valuation of Firms When There is an Option to Shut Down," *International Economic Review*, Vol. 26, No. 2, pp. 331-349.

[38] McDonald, R. and D. Siegel, 1986, "The Value of Waiting to Invest," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 101, No. 4, pp. 707-727.

[39] Merton, R. C., 1973, "Theory of Rational Option Pricing," *Bell Journal of Economics and Management Science*, Vol. 4, pp. 141-183.

[40] Myers, S. C., 1977, "Determinants of Corporate Borrowing," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 147-175.

[41] Myers, S. C., 1984, "Finance Theory and Financial Strategy," *Interfaces*, Vol. 14, No. 1, pp. 126-137; repinted in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real OPtions and Investment Under Uncertainty: Classical Readings and Recent Contributions*, MIT Press.

[42] Myers, S. C., and S. Majd, 1990, "Abandonment Value and Project Life," *Advances in Future and Option Research*, Vol. 4, pp. 1-21; reprinted in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real Options and Investment Under Uncertaity: Classical Readings and Recent Contributions*, The MIT Press.

[43] Neftci, Salih N., 2000, *An Introduction to the Mathematics of Financial Derivatives, Second Edition*, Academic Press.

[44] Ottoo, Richard E. 2000, *Valuation of Corporate Growth Opportunities*, Garland Publishing, Inc.

[45] Pindyck, R., 1988, "Irreversible Investment, Capacity Choice, and the Value of the Firm," *American Economic Review* , Vol. 78, pp. 969-985.

[46] Pindyck, R., 1991, "Irreversibility, Uncertainty, and Investment," *Journal of Economic Literature*, Vol. 29, No. 3, pp. 1110-1148; reprinted in Schwartz, E. S., and L. Trigeorgis ed., 2001, *Real Options and Investment Under Uncertaity: Classical Readings and Recent Contributions*, The MIT Press.

[47] Pindyck, R., 1993, "Investment of Uncertain Cost," *Journal of Financial Economics*, Vol. 34, pp. 53-76.

[48] Poddock, J., D. Siegel, and J. Smith, 1988, "Option Valuation of Claims on Real Assets: The Case of Offshore Petroleum Leases," *Quarterly Journal of Economics*, Vol. 103, pp.479-508.

[49] Schwartz, Eduardo S. and Mark Moon, 2000, "Evaluating research and development investment," In M. Bernnan and L. Trigoergis (eds.), *Project Flexibility, Agency, and Competition*, Princeton University Press.

[50] Stoll, Hans R. and Robert E. Whaley, 1993, *Futures and Options: Theory and Application*, South-Western Publishing.

[51] Tobin, James, 1969, "A General Equilibrium Approach to Monetory Theory," *Journal of Money, Credit, and Banking* Vol. 1, pp. 15-29.

[52] Trigeorgis, Lenos, 1993, "The Nature of Option Interactions and the Valuation of Investments with Multiple Real Options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol. 28, No. 1, pp. 1-20.

[53] Trigeorgis, Lenos, 1996, *Real Options: Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press.

[54] Vasicek, Oldrich A., 1977, "An Equilibrium Characterization of the Term Structure," *Journal of Financial Economics*, Vol. 5, pp. 177-188.

[55] 飯原慶雄、2001、「確率的キャッシュフローの評価」、『経営論集』、東洋大学経営学部、第 54 号、pp.83 - 93。

[56] 飯原慶雄、2002、「オプション・ペイオフの期待値計算とその応用」、『経営論集』、東洋大学経営学部、55 号、pp. 41-50。

[57] 飯原慶雄、1997、「企業の撤退計画」、『南山経営研究』、第 11 巻、第 3 号、pp. 559-565。

[58] 代田豊一郎・馬場直彦、2002、「リアル・オプションの基本原理と経済学への応用について—不確実下での意思決定モデル—」、*IMES Discussion Paper Series*, Discussion Paper No. 2002-J-1, 日本銀行金融研究所。

[59] 山本大輔、刈屋武昭（監修）、2001、『入門リアル・オプション—新しい企業価値評価の技術—』、東洋経済新報社。