

不確実的キャッシュフローの下での投資決定基準

Investment Criteria under Uncertain Cash-flow

東洋大学経営力創成研究センター 研究員 董 晶輝

要旨

本稿では、プロジェクトの正味現在価値の最大化問題としての投資決定基準の視点から、キャッシュフローが幾何ブラウン運動に従って確率的に変動する場合の投資決定基準を確定的な場合に比較可能な表現を示し、投資決定基準の基本となるのは従来の正味現在価値基準であることを示す。また、事業の撤退基準についても同様の結果を示す。これらの議論により、リアルオプション・モデルの投資決定基準の意味がより明確になり、従来の正味現在基準と異なるという主張が正しくないことが明らかになる。

キーワード(Keywords): 不確実的キャッシュフロー(Uncertain Cash-Flow)、正味現在価値(Net Present Value)、リアルオプション・モデル(Real Option Model)、投資決定基準(Investment Criteria)

Abstract

In this paper, we discuss the investment criteria from view point of maximization of present value of a project. In order to show the meaning of the investment criterion for probabilistic cash flow, firstly we show that the investment criterion for deterministic cash flow satisfy the Equimarginal Principle. Then we consider the case that the dynamics of cash flow follows geometric Brownian motion, and derive an expression of the investment criterion in comparable form to the former. As a result, we argue that the basic criterion of investment is the NPV rule. We also examine the criteria of disinvestment. Eventually, we expose the argument that the investment criterion in real option model is different from NPV rule in some real option literatures is incorrect.

はじめに

不確実なキャッシュフローの下での投資決定理論（リアルオプション理論）の文献では、新規投資プロジェクトを実行するための最適なキャッシュフローの水準が示されている^①。このような最適な投資実行水準では、プロジェクトの正味現在価値はかなり大きいプラスの価値になっている。このことから、しばしば、リアルオプション理論は正味現在価値が正であるならプロジェクトを採用するという伝統的な企業投資理論とは異なるものであると主張されてきた。しかし、プロジェクトをあるキャッシュフローの水準で実行することは、他の水準を選択することを不可能にするので、この問題はいわゆる相互背反プロジェクト（mutually exclusive projects）での選択問題であり、従って、正味現在価値が正であるのは当然としても、投資決定基準は正味現在価値の正負ではなく正味現在価値の最大のもので選択される。こうした観点から、本稿では、まず、キャッシュフローが確定的に推定した場合について、最適な投資実行時点ではキャッシュフローの水準が投資費用の利子部分に等しいことを示し、これが最適な選択は限界費用と限界収益が等しくなるという限界原理を表わすことを明らかにする。次に、幾何ブラウン運動の場合の投資決定水準について、確定的キャッシュフローの投資決定水準と比較可能な表現を示した上で、なぜ両者が異なるものになるのか、その理由について考える。同時に、操業中のプロジェクトの退出問題についても検討する。

本稿は次のように構成される。1 節では、分析の基礎として、キャッシュフローが時間の確定的関数で表わされる場合の最適な投資実行水準と退出水準について検討する。2 節では、キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動で表わされる場合の最適な投資実行水準および退出水準について、リアルオプション理論での結果を簡単に要約するとともに、最適水準を決定する式を変換するために使用する関係式を説明し、最適水準についての新しい式を導出する。3 節では、キャッシュフローが幾何ブラウン運動のときに、確定的な場合に比較して、参入水準は上昇し、退出水準は下降する理由を明らかにする。4 節では、結論を述べる。

1 確定的キャッシュフローの場合

最初に投資実行後のキャッシュフローが時間の確定的関数として表現される場合を取り上げ、新規投資の実行（参入問題）と、事業の撤退（退出問題）について検討する^②。これらはその後で展開されるキャッシュフローが確率過程として表現される場合の分析の基礎をなすものである。

1.1 新規投資

投資を実行すると、その時点以降、連続的にキャッシュフローが得られるものとする。現在時点を 0 とし、時刻 t でのキャッシュフローを $f(t)$ で表すことに

する。 $f(t)$ は投資の実行時点とは関係がなく、時間 t の微分可能な確定的関数であるとする。投資を実行するためには非可逆的な投資コスト K が必要である。将来のキャッシュフローを一定の割引率 r で割り引いた投資の正味現在価値を考え、この正味現在価値が最大となるような投資実行時点を求めることにする。投資実行時点を τ とすると、正味現在価値について次の命題 1 が成立する。

命題 1 (正味現在価値) 時刻 τ で投資を実行したとき、現時点 0 での正味現在価値は

$$NPV(\tau) = \int_{\tau}^{\infty} e^{-rt}f(t)dt - e^{-r\tau}K = \int_{\tau}^{\infty} [f(t) - rK]e^{-rt}dt \quad (1)$$

となる。

命題 1 はキャッシュフローと投資コストの利子部分 (rK) の差の現在価値が正味現在価値になることを示している。

投資実行時点についての極大条件については次の命題 2 が成立する。

命題 2 (投資実行の極大条件) 正味現在価値の極大条件は

$$f'(0) < 0$$

または

$$f(t) = rK, \quad f'(t) > 0 \quad (2)$$

である。

命題 2 は正味現在価値が局所的最大となる条件を示している。大局的最大の局所的最大であるから、命題 2 の条件は最適投資時点の必要条件となる。(2)式は最適投資実行時点ではキャッシュフローが投資コストの利子と等しくなることを意味する。すなわち、最適投資実行時点では投資を延期することにより得られる利益(rK)と失うキャッシュフローが等しくなることを意味する。最適投資時点の選択は、ある時点を選択すれば他の時点を選択することができなくなるので、コーポレート・ファイナンスで相互排他的(*mutually exclusive*)なプロジェクトと呼ばれているもので、現在価値の正負ではなく、現在価値が最大となる点を選択される。しかもここでは連続無限の代替案が存在するので、最適投資実行時点では経済学での限界原理(限界収入が限界支出と等しい)が成立することになる。命題 1 から次の系 1 が得られる。

系 1 (投資実行時点が異なるときの現在価値の差) 2 つの投資時点を t_1 と t_2 ($t_1 < t_2$) とする。 t_1 で投資を実行する代わりに t_2 で投資を実行すると、正味現在価値は

$$\Delta NPV(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} [f(t) - rK]e^{-rt} dt \quad (3)$$

だけ減少する。

系1から、 t_1 が(2)式を満たしていても、(3)式の $\Delta NPV(t_1, t_2)$ が負でなるような t_2 が存在するならば、 t_1 では投資を実行すべきではないということになる。また、(2)式を満たす τ に対し、時刻 τ 以降のキャッシュフロー $f(t)$ がすべて rK 以下であれば、時刻 τ で投資を実行することが最適である。

キャッシュフローが確率的に変動し、キャッシュフローが確率過程として表現される場合でも、(1)式や(3)式に対応するものを求めることができる。現在時点 $t=0$ とし、時刻 t でのキャッシュフローを $X(t)$ とする。また、現在のキャッシュフローの水準を x とする($X(0) = x$)。この場合次の命題と系が成り立つ。

命題3 (正味現在価値) キャッシュフローが最初に x_1 に到達するか x_1 を超えた時点 τ とし、時刻 τ で投資を実行するものとする、正味現在価値の期待値は

$$\begin{aligned} ENPV(x; x_1) &= E_0 \left[\int_{\tau}^{\infty} e^{-rt} X(t) dt - e^{-r\tau} K | X(0) = x \right] \\ &= E_0 \left[\int_{\tau}^{\infty} (X(t) - rK) e^{-rt} dt | X(0) = x \right] \end{aligned} \quad (4)$$

となる。

系2 (投資実行時点が異なるときの現在価値の差) 最初に x_1 に到達するか x_1 を超えた時点 τ_1 とし、 x_2 に到達するか x_2 ($x_2 > x_1$)を超えた時点 τ_2 とすると、

$$\Delta ENPV(x_1, x_2) = E_0 \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} [X(t) - rK] e^{-rt} dt | X(0) = x \right] \quad (5)$$

となる。

1.2 退出問題

新規投資の場合、ただちに参入するのが最適である場合を除くと、最適参入時点では、キャッシュフローが投資コストの利子に等しくなることを見たが、最適実行時点の意味がより明確になる場合として、事業からの退出を考えてみる。プロジェクトは現在操業中で、現在時点 $t=0$ とし、時刻 t でのキャッシュフローが $f(t)$ で表わされるとする。 $f(t)$ は時間 t の微分可能な確定的関数である。ここでは、退出までに得られるキャッシュフローの現在価値が最大となるような退出時点 τ を求めることにする。退出時点 τ とすると、正味現在価値は

$$NPV(\tau) = \int_0^{\tau} f(t)e^{-rt} dt \quad (6)$$

となる。したがって、退出の極大条件は、

$$f'(0) < 0$$

または

$$f(t) = 0, \quad f'(t) < 0 \quad (7)$$

となる。ただちに退出する場合を除くと最適な退出時点では、キャッシュフローは0となる。また、2つの退出時点 t_1, t_2 ($t_1 < t_2$) について、

$$\Delta NPV(t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f(t)e^{-rt} dt \quad (8)$$

となるので、 t_1 でキャッシュフローが0になっても、その時点から t_2 までのキャッシュフローの t_1 での現在価値が正となるような t_2 が存在するとき、換言すれば、将来、業績が改善する見込みがあれば、 t_1 で退出すべきではない。しかし、将来、正のキャッシュフローが期待できなければ、キャッシュフローが0になった時点で退出するのが最適となる。

2 不確実的キャッシュフローの場合

キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動で表現される場合については、Dixit and Pindyck(1994)をはじめ、リアルオプションの文献では、しばしば取り上げられてきた。ここでは、この場合の結果を簡潔に示し、最適実行水準と最適退出水準について、新しい表現に変更した上、その意味を検討することにする。キャッシュフロー $X(t)$ がパラメータ μ と σ の幾何ブラウン運動に従うとする。

$$dX(t) = \mu X(t)dt + \sigma X(t)dW(t) \quad (9)$$

ここで、 $W(t)$ は標準ブラウン運動である。キャッシュフローの水準が x_1 に到達したときに投資を実行すると、現在のキャッシュフローの水準が x のときの期待正味現在価値 $V(x; x_1)$ は $\mu < r$ のとき、

$$V(x; x_1) = \left(\frac{x_1}{r - \mu} - K \right) \left(\frac{x}{x_1} \right)^{\alpha}, \quad x < x_1$$

$$V(x; x_1) = \frac{x}{r - \mu} - K \quad x \geq x_1$$

となる。ここで、 α は2次方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 z(z-1) + \mu z - r = 0 \quad (10)$$

の正根である。また、 $V(x; x_1)$ を最大にする x_1 は

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} (r - \mu)K \quad (11)$$

となる。最適投資実行水準を表わす(11)式の右辺の意味を説明することは容易で

はない。(11)式の両辺を $r - \mu$ で割ると、

$$\frac{x_1}{r - \mu} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} K$$

となる。この式の左辺は投資実行時点でのキャッシュフローの期待現在価値であり、 $\alpha > 1$ であるから、投資実行時点でのプロジェクトの正味現在価値は零よりもかなり大きくなる。従って、リアルオプション・モデルは従来の正味現在価値が正であればプロジェクトを採択する正味現在価値ルールとは異なるものである。以上が Dixit and Pindyck(1994)など、リアルオプション関係の文献で述べられている主な結果である。以下では、(11)式の条件について検討する。

(10)式は z の 2 次式

$$F(z) = \frac{1}{2} \sigma^2 z(z - 1) + \mu z - r$$

であり、 $F(z)$ の正根を α 、負根を β とすると、

$$F(z) = \frac{1}{2} \sigma^2 (\alpha - z)(\beta - z)$$

と書けるので、

$$\frac{F(0)}{F(1)} = \frac{r}{r - \mu} = \frac{\alpha}{\alpha - 1} \frac{\beta}{\beta - 1} \quad (12)$$

となる。このことから幾何ブラウン運動の場合の最適投資水準について次の命題が得られる。

命題4 (幾何ブラウン運動の場合の最適参入水準) 投資コストを K 、割引率を r とすると、キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動で表わされる場合の最適な投資実行水準は

$$x_1 = \frac{\alpha}{\alpha - 1} (r - \mu) K = \frac{\beta - 1}{\beta} r K \quad (13)$$

となる。 α と β は方程式

$$r - \sigma^2 z(z - 1)/2 - \mu z = 0$$

の正根と負根である。

キャッシュフローが時間の確定的な関数として表現できる場合、最適な投資実行時点ではキャッシュフローの水準が rK に等しかったのに対し、幾何ブラウン運動の場合は rK に係数 $(\beta - 1)/\beta$ が掛った水準にまで上昇する (β は負根であるから係数は1より大となる)。その上昇分は

$$\frac{\beta - 1}{\beta} r K - r K = -\frac{1}{\beta} r K$$

である。

事業からの退出を考えるときに、キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動で表現されると考えると、キャッシュフローは負になることはないので、退出の

際に正の追加的収入が得られない限り退出することはない。そこで、 $X(t)$ を幾何ブラウン運動で、 k を正の定数として、キャッシュフローが $X(t) - k$ と表わされるものとする。 $X(t)$ は収入から変動コストを引いたもので、 k は固定費用であるとする⁽⁴⁾。以下では、確定的な場合と同様、退出の際の追加的なキャッシュフローは無視することにする。 $X(t)$ が x_1 以下になったときに退出するものとする、現在の $X(0)$ が x のときの期待正味現在価値 $V(x; x_1)$ は $\mu < r$ のとき、

$$V(x; x_1) = \left(\frac{x}{r - \mu} - \frac{k}{r} \right) - \left(\frac{x_1}{r - \mu} - \frac{k}{r} \right) \left(\frac{x}{x_1} \right)^\beta, \quad x > x_1$$

$$V(x; x_1) = 0 \quad x \leq x_1$$

となる。ここで、 β は(10)式の負根である。最適な退出水準は

$$x_1 = \frac{\beta}{\beta - 1} (r - \mu) \frac{k}{r} \quad (14)$$

となる。(12)式の関係を利用すると、 x_1 は

$$x_1 = \frac{\alpha - 1}{\alpha} k \quad (15)$$

とも表せるので、この時点でのキャッシュフローの水準は

$$\frac{\alpha - 1}{\alpha} k - k = -\frac{1}{\alpha} k$$

となり、最適退出時点でのキャッシュフローの水準は負となる。

次節でなぜ参入時のキャッシュフローの水準が上昇するのか、事業からの退出の際に、キャッシュフローが負になってから退出するのか、また、どのようなとき参入水準が上昇し、退出水準が下降するのかについて検討する。

3 参入水準と退出水準の検討

最初に、幾何ブラウン運動の場合に、最適な投資実行水準水準が rK より大の理由について検討する。2つの投資実行水準 rK と $rK + dx$ を考える。系2から、 rK で投資を実行した場合のプロジェクトの正味現在価値と $rK + dx$ で投資を実行した場合のその差は $X(t)$ が rK に到達した時点から $rK + dx$ に到達するまでの間の $X(t) - rK$ の期待現在価値である。 $X(t)$ が rK に到達した後で rK を下回る確率は正であるから、 dx が十分に小さい時には、 $X(t)$ が $rK + dx$ に到達するまでに、 rK 以下で推移の可能性が大で、(5)式の右辺が負の値をとる。このため、キャッシュフローの水準 rK 以上に達した時に投資実行した方がプロジェクトの正味現在価値が大になる。したがって、確定的な場合とは異なり、 $X(t)$ が rK よりも高い水準に到達してから参入するのが最適となる。最適な退出水準についても、キャッシュフローが0になる時点ではなく、負の水準に到達してから退出するのが最適になるのも、幾何ブラウン運動の場合、キャッシュフローが0になった直後に正となる確率がプラスであるためである。

次に、ブラウン運動のパラメータ (σ と μ) と最適な参入水準の関係について

検討してみる。最適な参入水準 x_1 は

$$x_1 = \frac{\beta - 1}{\beta} rK = \left(1 - \frac{1}{\beta}\right) rK$$

であり、 β は負であるから、 β が大である（0に近い）ほど、 x_1 は rK より高い水準になる。 β と σ あるいは μ の関係は

$$\frac{\partial \beta}{\partial \sigma} > 0, \quad \frac{\partial \beta}{\partial \mu} < 0$$

であるから、 σ が大きいほど、また、 μ が小さいほど参入水準は高くなる。このことはもう少し異なる観点から説明することもできる。いま、 a と b という2つの水準（ $a < b$ ）を考え、 $X(t)$ が b から a に最初に到達するまでの経過時間（first-passage time interval）を $d(b, a)$ で表し、下降経過時間と呼ぶことにする。また、 $E[e^{-rd(b,a)}]$ を下降割引因子(down-discount factor)と呼ぶことにすると、

$$E[e^{-rd(b,a)}] = \left(\frac{b}{a}\right)^\beta$$

となる。 $b/a > 1$ であるから、この式の右辺は b/a の値に関係なく、 β の増加関数となり（図1参照）、左辺は $d(b, a)$ の減少関数である（ $d(b, a)$ は確率変数であるので、この表現は厳密ではないが）ので、下降経過時間が小さい場合、 β は大きく（0に近く）なる。したがって、下降経過時間が小さい、すなわち、急激に下降する可能性が高い時、参入水準は上昇する。

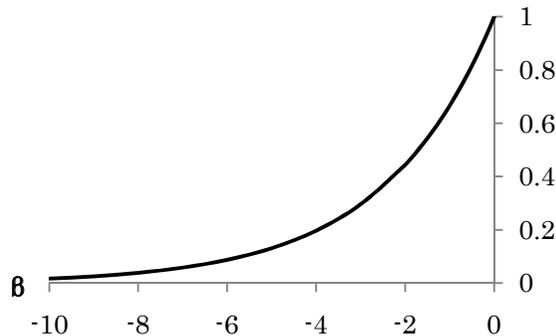


図1 下降割引因子

事業からの退出の場合は、 α が小さい（1に近い）とき、キャッシュフローを基準とする退出水準は0以下に大きく低下する。 $X(t)$ が a から b に最初に到達するまでの経過時間を上昇経過時間とよび、これを $u(a, b)$ で表し、 $E[e^{-ru(a,b)}]$ を上昇割引因子(up-discount factor)と呼ぶことにすると、 $X(t)$ が幾何ブラウン運動の場合には

$$E[e^{-ru(a,b)}] = \left(\frac{a}{b}\right)^\alpha$$

となる。上昇経過時間が小さい、すなわち、急激に上昇可能性が高い時、退出水準は低下する。したがって、 σ が大きい時、また、 μ が大きい時、退出水準は上昇する（図2参照）。キャッシュフローが確定的な場合、退出はキャッシュフローが0になったときであるが、キャッシュフローが0になっても、その時点からある時点までのキャッシュフローのその時点での現在価値が正になるような時点が見つければ、この時点で退出すべきではないことを明らかにした。 $X(t)$ が幾何ブラウン運動であるときも、キャッシュフローが0になった時点で退出するのは最適ではなく、キャッシュフローが負のある水準まで低下してから退出することになる。そして、その水準はキャッシュフローのボラティリティが大きいほど、また、ドリフトが大きいほど低くなり、キャッシュフローのマイナスの程度が大きくなっても退出しないことになる。

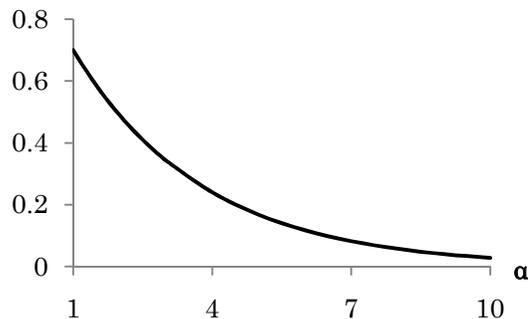


図2 上昇割引因子

キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動で表わされる場合の参入水準は確定的な場合の参入水準に比較して $rK/(-\beta)$ だけ増加し、退出水準は k/α だけ減少する。すなわち、参入水準の増加分は β の絶対値に反比例し、退出水準の減少分は α に反比例している。 β は下降割引因子で、 $b/a = z$ で表わしたときの、 $z = 1$ での z についての微分係数であり、 α は、 $a/b = z$ で表したときの $z = 1$ での微分係数である。したがって、次の命題が得られる。

命題5（幾何ブラウン運動での実行水準）キャッシュフローの変動が幾何ブラウン運動に従う時には、確定的な場合の最適な実行水準に比較して、下降割引因子 z^β あるいは上昇割引因子 z^α の $z = 1$ での微分係数に反比例して、上昇あるいは下降する。

以上のことを若干の数値例で見てみる。パラメータ値は、表1のようである。

表1 数値例のパラメータ値

		パラメータ値			
新規投資	$\mu = 0.03,$	$\sigma = 0.1,$	$r = 0.05,$	$K = 2000$	
退出問題	$\mu = -0.03,$	$\sigma = 0.1,$	$r = 0.05,$	$k = 100$	

最適な参入と退出の水準および2次方程式の根 α と β を表2に示した。 σ の増加が参入水準を上昇させ、退出水準を低下させることを確かめるため、表1のパラメータ値のほかに $\sigma = 0.2$ の場合の結果を表2に合わせて表示した。最適な参入水準は確定的な場合の $rK = 100$ より高くなり、 σ の増加につれ高くなることが確認される。また、最適な退出水準についても同様のことが観察される。さらに、 α と β の値から、(13)式あるいは(15)式の関係が成立することや、最適水準の上昇分あるいは下降分が $-\beta$ あるいは α に反比例することが確認される。

表2 2次方程式の根と最適水準

	新規投資		退出問題	
	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$	$\sigma = 0.1$	$\sigma = 0.2$
α	1.5311	1.3508	8.2170	3.2656
β	-6.5311	-1.8508	-1.2170	-0.7656
x_1	115.3113	154.0312	87.8301	69.3774

4 結論

リアルオプション理論の文献では、不確実的キャッシュフローの下での投資基準が従来の正味現在価値基準とは異なるものであると主張してきた。本稿では、プロジェクトの現在価値の最大化問題としての投資決定基準の視点から、確定的キャッシュフローの下での投資決定基準はキャッシュフローの水準が投資限界費用(投資費用の利子部分)に等しいという限界原理に一致することを示したうえ、キャッシュフローが幾何ブラウン運動に従って確率的に変動する場合の投資決定基準を確定的な場合に比較可能な表現を示した。ここで示した幾何ブラウン運動での投資決定基準の表現は確実的な場合の基準に1より大の係数が掛るものとなることから、投資決定基準の基本的部分は限界原理によって決まるもので、キャッシュフローが確率的に変化する場合は将来のキャッシュフローの下降の可能性の影響により投資実行の水準が上方修正されるものになることを明らかにした。また、事業の撤退基準としては、キャッシュフローが確定的場合は収益と限界固定費用が等しくなるとき、すなわち、キャッシュフローが零であるのに対し、幾何ブラウン運動の場合は撤退時点でのキャッシュフローの水準が限界固定費用よりも小さくなるときであり、キャッシュフローがかなりマイナスになることを示した。これまでのリアルオプション理論が主張してきたことは誤解を招くもので

あり、投資決定基準の基本となるのは従来の正味現在価値基準であることを示した。

【注】

- (1) 代表的な文献として Dixit and Pindyck (1994), Trigeorgis (1996)を参照。
- (2) ここでの確定的なキャッシュフローは将来各時点において一つの値を推定することを意味し、必ず確実にそのようになるという意味ではない。確定的キャッシュフローでの投資決定については、Jorgenson(1963), Ross, Westerfield, and Jaffe(2005), Brealey, Myers, and Allen(2006)などを参照。
- (3) 退出時に追加的な支出または収入があると、参入のときと同様な形が得られる。退出時の追加的な支出または収入は正の場合も、負の場合も考えられるので、ここでは、退出条件の意味が考えやすいようにこれらの収入または支出を無視することにする。
- (4) 販売数量を確率変数とし、販売価格、比例費が販売数量に比例し、費用が比例費と固定費からなる場合、あるいは、販売数量と費用が固定的で、販売価格が確率的に変動する場合などが考えられる。新規投資の場合のキャッシュフローをこのように考えると、新規投資の際の費用は K から、 $K + k/r$ に増加する。

【参考文献】

- Brealey, R. A., S. C. Myers, and F. Allen (2006), *Principles of Corporate Finance*, 8th edition, McGraw-Hill.
- Dixit, A. K. and R. S. Pindyck (1994), *Investment under Uncertainty*, Princeton University Press.
- Jorgenson, D. W. (1963), "Capital Theory and Investment Behavior", *The American Economic Review*, Vol. 53, No. 2, pp. 247-259.
- Ross, S. A., R. W. Westerfield, and J. F. Jaffe (2005), *Corporate Finance*, 7th edition, McGraw-Hill.
- Trigeorgis, L. (1996), *Real Options : Managerial Flexibility and Strategy in Resource Allocation*, The MIT Press.

受付日：2011年1月12日 受理日：2011年1月24日