等　円　術　Ⅱ*

—— 三斜等円術（一般公式）——

米　山　忠　興**

Equi-radial Circles in Segmental Triangles Ⅱ

—— Oblique Triangles (General Formula) ——

Tadaoki YONEYAMA

1. はじめに

前号の「等円術Ⅰ．—鉤股中等円術—」では，直角三角形に界斜を隔てて等円を入れる場合を取り扱った．今回は，任意の三角形内の等円に適用出来る一般論を展開する．

以下に示す5つの算額のある寺社のうち，郡上八幡と昆陽寺は実際に訪ねた．
郡上八幡神社については，今年度のもう一つの報告に詳述したので，ここでは省略する．
☆昆陽寺（こやでら）

昆陽寺へは平成10（1998）年の秋に神戸・伊丹周辺の算額を調べに行った時に初めて立ち寄った．伊丹駅で昆陽寺（こんようじ）方面に行くバスを聞いたが，何故か分からなかった．仕方がないので，駅の近くにあった案内図で「昆陽池」というのを見つけて，それを手掛かりにさらに聞くと，「こんよう」ではなく，「こや」だった．
やっとの事でバスに乗って，目指す昆陽寺へ行ったが，そこにあったのは，大きくて立派だったが，ほとんどが新しいお堂だった．

算額らしいものは全く見つからず，お寺の関係者らしい人に尋ねると，その時から4～5年前の「神戸大地震」でほとんどが崩壊して，再建したばかりであるという事だった．

そこで，算額の所在も尋ねると，確かに震災前にはあったが，今は材木置き場に壊れた建物の廃材と一緒になっていて，分からないということだった．

已を得ず，そこから比較的近くにあるという猪名野神社へ向かった．

---

* 和算書及び算額の資料収集・調査の多くは，平成13～15年度の東洋大学特別研究（個人研究）の研究期間に行なった．
また，取りまとめは，平成15～17年度学術振興会科学研究費補助金基盤研究（C）「算額及び和算の数学史・文化史的な調査・研究と解法の探究」によって行なわれた．
** 東洋大学自然科学研究室　〒112-8606　東京都文京区白山5-28-20
Natural Science Laboratory, Toyo University 28-20，Hakusan5, Bunkyo-ku, Tokyo, 112-8606, Japan

猪名野神社は，ちょうど秋祭りらしく，境内には多くの人が居て，拝殿にも参拝客が絶えなかった．猪名野神社の復元算額（算額（その6）にその内の算題一題を紹介してある）は拝殿内の左側にあった．多くの人が参拝中だったので，見知らぬ「よそ者」の私が，拝殿内に昇って算額に近づいて見学するわけにもいかなかったので，遠くから「近畿の算額」のコピーと同じであることを確かめただけで，帰途に就いた．

昆陽寺は西国街道に面した大きな寺院だったし，猪名野神社も氏子のたくさん集まるかなり大きな神社だった．こういう寺社に算額を掲げれば，当然のことながら，多くの人々の眼に触れることができるであろうと思われた．

平成17年に大きな事故を起こしたJR宝塚線（福知山線）は，大阪から尼崎を通って伊丹まで，何回か利用した．ただし，神社やお寺からの帰路は，ほとんどいつも私鉄の駅の方に先に辿り着き，そこから大阪方面に戻ることが多かったので，上り電車を利用したことはあまり無かった．

2. 算額面

算 額 目 次

★［B］三斜等円術

1（伊丹市）	昆陽寺 第七問	（嘉永年間）	三　斜	➡	界斜
2（埼玉県神川町）	光明寺	（大正3年）	三　斜	➡	界斜
3（千葉県成田山）	新勝寺	（明治30年）	中小界斜	➡	大斜
4（郡上郡八幡町）	八幡神社	（嘉永3年）	中小界斜	➡	大斜
5（高島郡マキノ町）	天神社第七問	（明治8年）	中鉤＋全円径	➡	n個の等円径

［出典］

［B1］「近畿の算額」（平成4年刊）p.70

［B2］「算額を解く」（大原茂著：平成10年刊：さきたま出版会）p.99

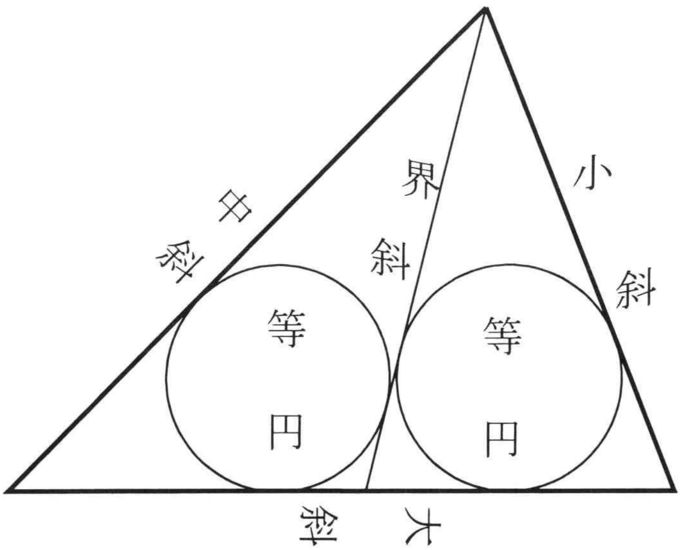
［B3］「千葉県の算額」（昭和45年刊）p.81

［B4］「郷土数学の文献集（3）」（萩野公剛編：昭和41年刊：富士短期大学出版部）p.227「飛騨数学史」（垣水寿太郎著）

［B5］「近畿の算額」（平成4年刊）p.126

［B1］～［B4］は，いずれも大斜または界斜を求める問題で，等円径を問うものはない．
初めは何となく不思議な感じがあったが，その理由も，算題を解いてみると分かる．
また，［B5］のような問題を解くときに，一般公式の威力が分かる．

[B1]



（伊丹市）昆陽寺

第七問

今有如三斜内隔斜容二等円大斜若干中斜若干小斜若干問界斜幾何

答曰　如左術

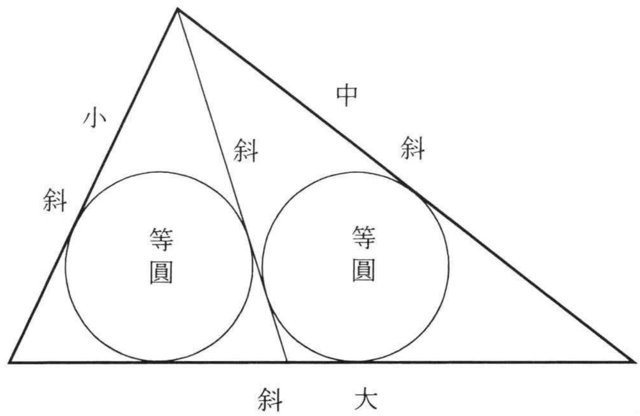
術曰置中斜加小斜自之内減大斜冪開平方半之得界斜合問

昆陽　佐藤卯之助政信　撰

（嘉永年間）

$$界 = \frac{1}{2}\sqrt{（中+小）^2 - 大^2}$$

[B2]



（埼玉県神川町）光明寺

今有如圖三斜内隔斜容等圓二個只云大斜三百一十五寸中斜二百五十七寸小斜六十八寸問界斜幾何

答曰界斜四十〇寸

術曰中小斜和自乘之内減大斜冪餘開平方之半之得界斜合問

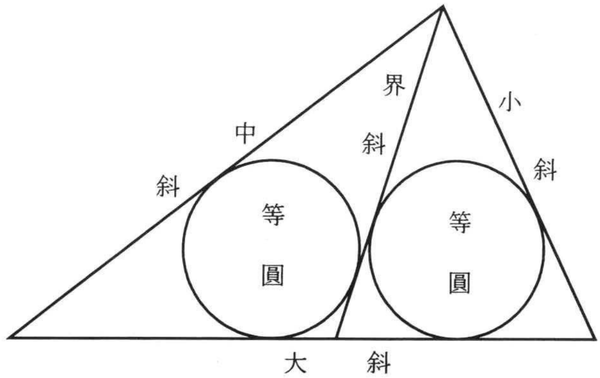
（大正三年）

$$界 = \frac{1}{2}\sqrt{(中+小)^2 - 大^2}$$

$$40 = \frac{1}{2}\sqrt{(257+68)^2 - 315}$$

[B3]

成田山新勝寺



今有如図画三斜内設界斜及等
円二個只言其中斜十一寸小斜
六寸界斜四寸問大斜幾何

答曰　大斜十五寸

術曰置中小和自之内以減
界斜冪四段余開平方得大斜
合問

長谷川幸次郎志孝

埼玉県南埼玉郡小林村長谷川矩利門人

明治三拾年五月吉日撰之敬白

$$大 = \sqrt{(中+小)^2 - 4界^2}$$

中斜＝１１
小斜＝６　　⇒　　大斜＝１５
界斜＝４

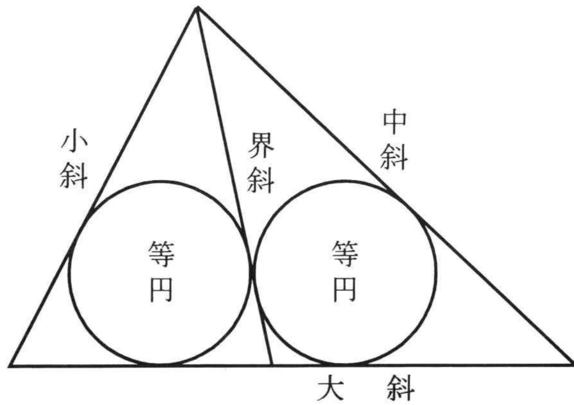
[B4]

美濃・郡上郡八幡町(口明方村)

八幡神社

第一問

奉懸算題



今有如図三斜之内隔界斜容二円等各径只云中斜二百五十七寸小斜六十八寸界斜四十零寸問大斜幾何

答曰　大斜三百一十五寸

術曰置中斜加小斜自乗之而得数之内減界斜冪四段平方開之得大斜合問

右　神谷直縄

(中略)

関流　越中州富山之人　高木允胤門人某等敬白

嘉永三庚戌仲春

$$大 = \sqrt{(中 + 小)^2 - 4界^2}$$

$$315 = \sqrt{(257+68)^2 - 4 \times 40^2}$$

[B5]

（滋賀県高島郡マキノ町）

官許平山麟家門人

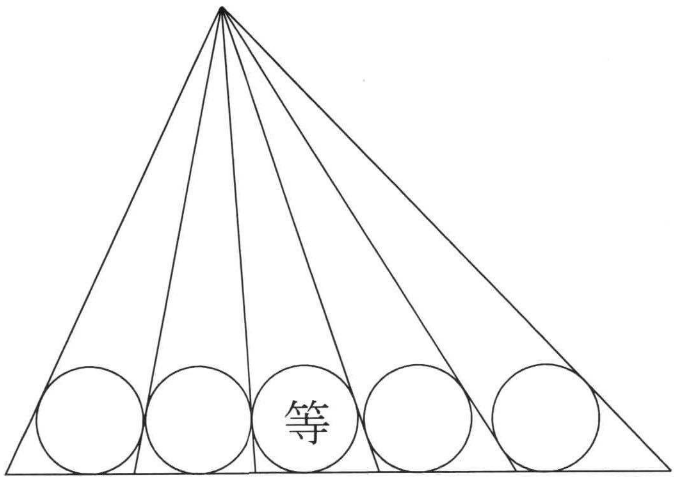
天神社　第七問

今有三斜之内如図逐隔斜容等円仮画等円五個只云中勾若干全円径若干問随等円個数得其円径術

滋賀縣海津出張所在勤

元大溝藩士

立入蔵六源弘



答曰如左

術曰置等円個数内減一個余為乗数置全径以中勾除之以減一個余乗数開之以減一個余乗中勾得其等円径合問

明治八年一月

$$n-1=\text{乗}$$

$$\text{中勾}\left(1-\sqrt[\text{乗}]{1-\frac{\text{全}}{\text{中勾}}}\right)=\text{等径}$$

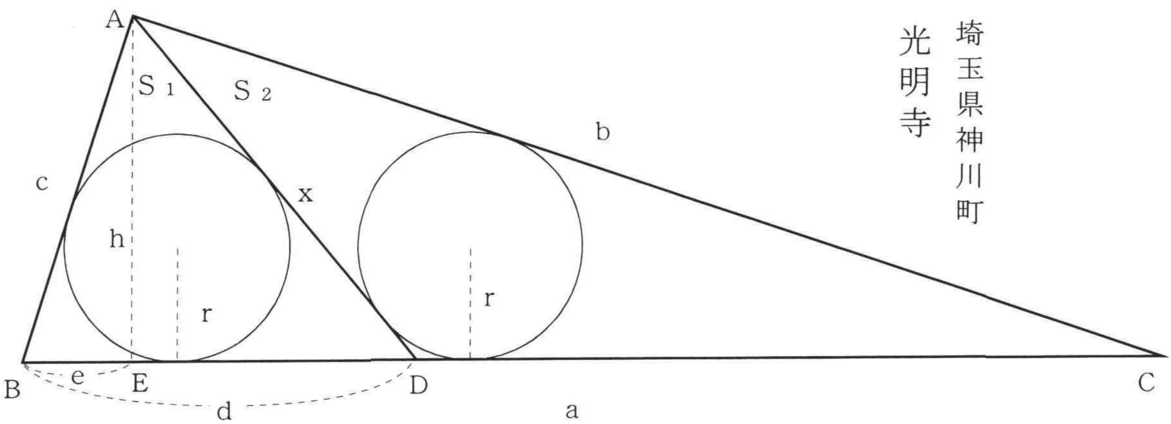
3. 三斜等円術（二等円）[B1] ～ [B4]

一般の三角形の中に，界斜を隔てて二つの等円を入れる問題を考える．

まず初めに，三平方（ピタゴラス）の定理を用いる直接的な解法を紹介する．このうち，界斜の求め方は，出典 [B2] の大原茂氏の解法による．

[解]（三斜 ⇒ 界斜）（大原解）

記号は下の図のようにとる．



$$\triangle \mathrm{ABD} : S_1 = \frac{1}{2}\mathrm{BD}\cdot\mathrm{AE} = \frac{1}{2}dh \qquad ①$$

$$S_1 = \frac{1}{2}r(\mathrm{AB}+\mathrm{BD}+\mathrm{DA}) = \frac{1}{2}r(c+d+x) \qquad ②$$

①，②から $\quad dh = r(c+d+x) \qquad ③$

$$\triangle \mathrm{ADC} : S_2 = \frac{1}{2}\mathrm{DC}\cdot\mathrm{AE} = \frac{1}{2}(a-d)h \qquad ④$$

$$S_2 = \frac{1}{2}r(\mathrm{AD}+\mathrm{DC}+\mathrm{CA}) = \frac{1}{2}r\{x+(a-d)+b\} \qquad ⑤$$

④，⑤から $\quad (a-d)h = r(a+b+x-d) \qquad ⑥$

③，⑥から

$$\frac{dh}{(a-d)h} = \frac{r(c+d+x)}{r(a+b+x-d)}$$

$$d(a+b+x-d) = (a-d)(c+d+x)$$

$$d(a+b+x) - d^2 = a(c+x) - d^2 + d(a-c-x)$$

$$d(b+c+2x) = a(c+x)$$

$$\therefore \quad d = \frac{a(c+x)}{b+c+2x} \qquad ⑦$$

次に直角三角形 ⊿ABE，⊿ADE，⊿ACE について，

$$\begin{cases} h^2 + e^2 = c^2 & ⑧ \\ h^2 + (d-e)^2 = x^2 & ⑨ \\ h^2 + (a-e)^2 = b^2 & ⑩ \end{cases}$$

$$\begin{cases} ⑨ - ⑧ \Rightarrow (d-e)^2 - e^2 = x^2 - c^2 & ⑪ \\ ⑩ - ⑧ \Rightarrow (a-e)^2 - e^2 = b^2 - c^2 & ⑫ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} d^2 - 2de = x^2 - c^2 \\ a^2 - 2ae = b^2 - c^2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2de = c^2 + d^2 - x^2 \\ 2ae = a^2 - b^2 + c^2 \end{cases}$$

$$\therefore \quad d(a^2 - b^2 + c^2) = a(c^2 + d^2 - x^2)$$

これにdを代入して，

$$\frac{a(c+x)}{b+c+2x}(a^2 - b^2 + c^2) = a(c^2 - x^2) + \frac{a^3(c+x)^2}{(b+c+2x)^2}$$

$$(b+c+2x)(a^2 - b^2 + c^2) = (c-x)(b+c+2x)^2 + a^2(c+x)$$

$$a^2\{(b+c+2x) - (c+x)\} + (b+c+2x)(c^2 - b^2) - (c-x)(b+c+2x)^2 = 0$$

$$a^2(b+x) + (b+c+2x)\{(c^2 - b^2) - (c-x)(b+c+2x)\} = 0$$

$$a^2(b+x) + (b+c+2x)\{-c(b+x) + 2x^2 + bx - b^2\} = 0$$

$$a^2(b+x) + (b+c+2x)\{-c(b+x) + (x+b)(2x-b)\} = 0$$

$$(b+x)\{a^2 + (b+c+2x)(2x-b-c)\} = 0$$

$$(b+x)\{a^2 + 4x^2 - (b+c)^2\} = 0$$

$$b + x \neq 0, \qquad \therefore \quad a^2 + 4x^2 - (b+c)^2 = 0$$

$$4x^2 = (b+c)^2 - a^2$$

界斜・大斜は，この式から簡単に平方に開くだけで求められる．

$$\therefore \quad x = \frac{\sqrt{(b+c)^2 - a^2}}{2} = \sqrt{s(s-a)} \quad （界斜［B1］，［B2］）$$

ただし，$a + b + c = 2s$

また，$a = \sqrt{(b+c)^2 - 4x^2}$．　（大斜［B3］，［B4］）

（三斜　⇒　界斜　⇒　等円径）

三斜等円術は一般に三斜と界斜の関係だが，等円径も求められる．

上の結果から，さらにrを求める．

③，⑦と　$S = S_1 + S_2 = \dfrac{ah}{2} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

を用いると，

$$r = \frac{dh}{c+d+x} = \frac{\dfrac{a(c+x)}{b+c+2x} \cdot h}{c + \dfrac{a(c+x)}{b+c+2x} + x}$$

$$= \frac{ah}{2s+2x} = \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s+x}$$
$$= \frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(a-c)}}{s+\sqrt{s(s-a)}} = \frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(a-c)}}{\sqrt{s}+\sqrt{(s-a)}}$$

となる．これは前号の鉤股中等円術の2等円径に等しい．

また，この等径は，さきの界斜・大斜に比べて，かなり複雑な形をしている．

さきに述べたように，[B1] ～ [B4] はいずれも大斜または界斜を求める問題であって，等円径を問うものはない．等径は

$$2r = \frac{2ah}{a+b+c+2x}$$
$$= \frac{\sqrt{(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}}{\sqrt{a+b+c}+\sqrt{-a+b-c}}$$

だから，答の等円径（$2r$）を大・中・小斜を用いて文章で表現すると，大変なことになるし，うまく書いても，界斜・中鉤を求めたあと，

$$2r = \frac{\text{大斜}\times\text{中鉤}\times 2}{\text{大小中斜和}+\text{界斜}\times 2}$$

であろう．

この等円径の解の形が，和算家が等円径を求めさせなかった理由であると思われる．

ただし，あとの等円術の一般公式は，中鉤と内接（大）円径を用いて，中鉤・大円径・小円径の間の非常にすっきりとしたきれいな関係になっている．

☆各算題の比較

☆　三斜　⇒　界斜

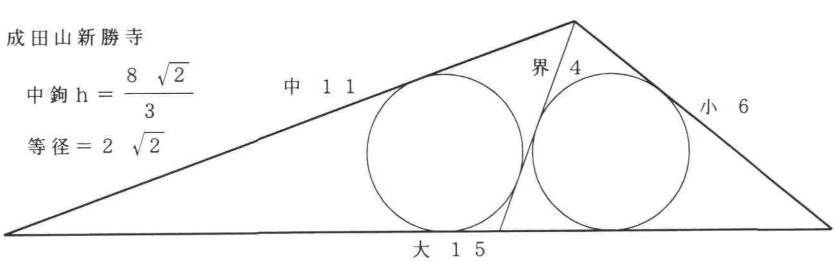
［Ｂ１］兵庫・昆陽寺（嘉永年間）
［Ｂ２］埼玉・光明寺（大正三年）

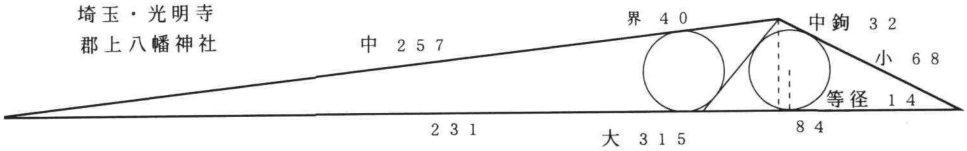
$$2\text{界} = \sqrt{(\text{中}+\text{小})^2 - \text{大}^2}$$

☆　中小界斜　⇒　大斜

［Ｂ３］成田山新勝寺（明治三十年）
［Ｂ４］郡上八幡神社（嘉永年間）

$$\text{大} = \sqrt{(\text{中}+\text{小})^2 - 4\,\text{界}^2}$$
$$315 = \sqrt{(257+68)^2 - 4\times 40^2}$$





[B1]，[B2] は界斜，また [B3]，[B4] は大斜を求める問題であり，いずれも，等円径を問うものではない．

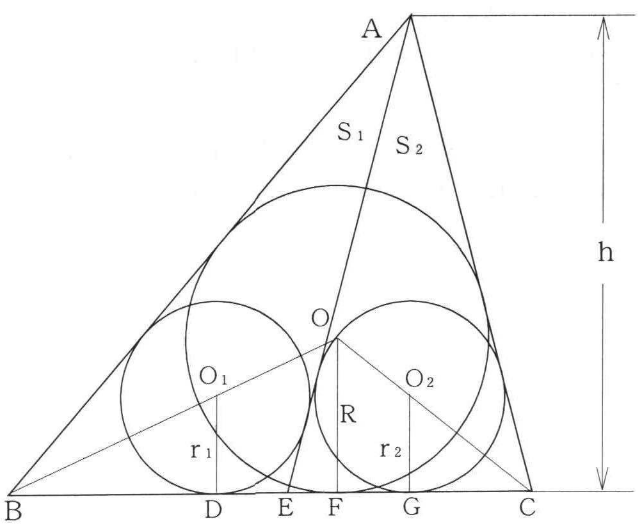
新勝寺のはかんたんな数値である．三斜・界斜は整数だが，中鉤・等円径は無理数である．
すべてが整数となるのは，光明寺と郡上八幡であるが，じっさいの形は，かなり偏平な三角形である．

光明寺の三斜の数値は八幡神社（嘉永三年）と同じで，大正三年だから，少なくともこの二つの中では，八幡神社がオリジナル，またはそれに近いであろう．

4. 一般公式（三斜等円術）

和算家が用いていた等円術の
一般公式である．

☆二等円



S : ⊿ABC

S_1 : ⊿ ABE

S_2 : ⊿ AEC

$S = S_1 + S_2$

中勾 : h

$2s = \mathrm{AB} + \mathrm{BC} + \mathrm{CA}$

とする．

$$\frac{r_1}{R} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BF}},\quad \frac{r_2}{R} = \frac{\mathrm{CG}}{\mathrm{CF}},$$

$$S = \frac{R}{2}\cdot 2s = Rs = \frac{h}{2}\mathrm{BC}.$$

$$S_1 = \frac{r_1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BE} + \mathrm{AE})$$

しかるに　$\mathrm{AE} = \mathrm{AC} + \mathrm{CE} - 2\mathrm{CG}$

$$\therefore\ S_1 = \frac{r_1}{2}(\mathrm{AB} + \mathrm{BE} + \mathrm{AC} + \mathrm{CE} - 2\mathrm{CG})$$

$$= \frac{r_1}{2}(2s - 2\mathrm{CG}) = r_1(s - \mathrm{CG})$$

$$= r_1 s - \frac{r_1 r_2}{R}\mathrm{CF}.$$

同様に，

$$S_2 = r_2 s - \frac{r_1 r_2}{R}\mathrm{BF}.$$

よって　上の $S = S_1 + S_2$ から

$$Rs = \left(r_1 s - \frac{r_1 r_2}{R}\mathrm{CF} \right) + \left(r_2 s - \frac{r_1 r_2}{R}\mathrm{BF} \right)$$

$$= (r_1 + r_2)\, s - \frac{r_1 r_2}{R}(\mathrm{CF} + \mathrm{BF})$$

$$= (r_1 + r_2)\, s - \frac{r_1 r_2}{R}\mathrm{BC}$$

$$= (r_1 + r_2)\, s - \frac{r_1 r_2}{R} \cdot Rs \cdot \frac{2}{h}$$

$$\times \frac{1}{s}: \qquad R = r_1 + r_2 - r_1 r_2 \cdot \frac{2}{h}$$

$$\times \frac{2}{h}: \qquad \frac{2R}{h} = \frac{2r_1}{h} + \frac{2r_2}{h} - \frac{2r_1}{h} \cdot \frac{2r_2}{h}$$

$$\therefore \left(1 - \frac{2R}{h} \right) = \left(1 - \frac{2r_1}{h} \right)\left(1 - \frac{2r_2}{h} \right)$$

この結果，三角形に内接する大円と，おのおのの小円の間には，三角形の高さ（中鉤）h を用いて，上のような関係があることが分かった．

これまで，和算と算額の問題に多く見られる等円径について議論してきたが，一般公式を求めた結果からみると，小円径が等しい必要はなく，一般にもとの三角形と，それを界斜で隔てた部分の小三角形に内接する任意の半径の円に対して成り立つ公式であることが分かった．

高砂神社奉納算額第二問（前号の等円術Ⅰ．に示した「命題」）のように，等円径は，中鉤と大円径できまるということも，上の一般公式によってかんたんに示すことが出来る．

☆n 個の等円

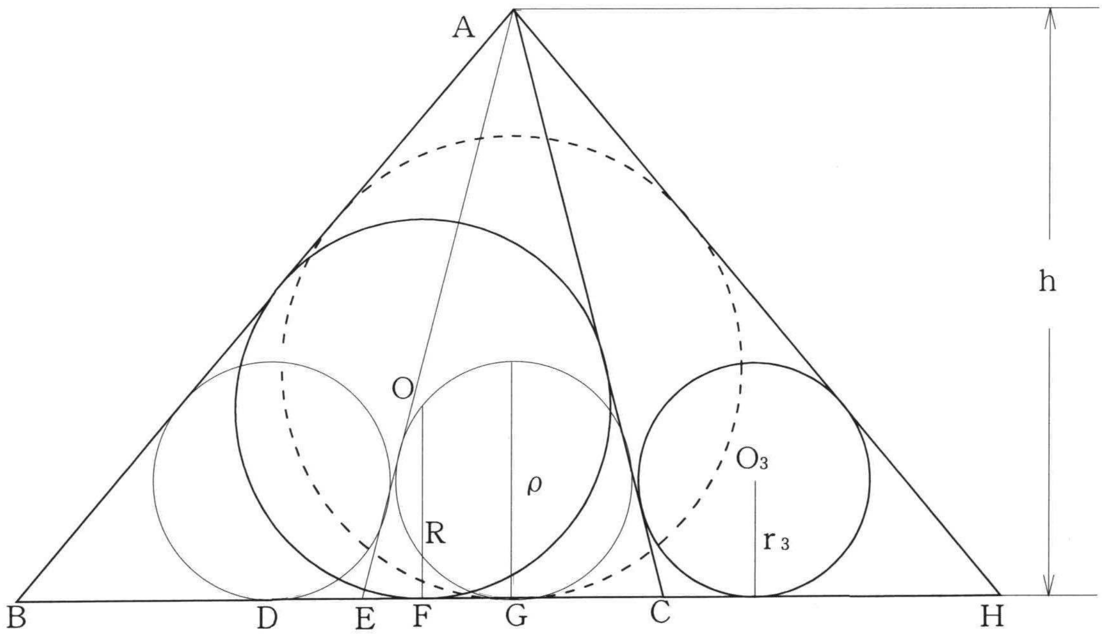
［B5］高島郡マキノ町 天神社 第七問に答える

3つの円の場合は，下の図のように，もう一つの円を入れる三角形⊿ACHを追加して考える．

⊿ABCの内接円の半径をR，⊿ACHの内接円の半径をr_3，そして全体の三角形⊿ABHの内接円（大円）の半径をρとする．

大円Rと小円r_1，r_2の関係は，すでに与えられている．

この関係を大円ρと小円R，r_3にも適用する．



$$\left(1-\frac{2\rho}{h}\right)=\left(1-\frac{2R}{h}\right)\left(1-\frac{2r_3}{h}\right)$$

$$=\left(1-\frac{2r_1}{h}\right)\left(1-\frac{2r_2}{h}\right)\left(1-\frac{2r_3}{h}\right)$$

一般に円がn個あるときも同様である．

とくに，n個の等円のときには，

大円の半径をζとすると，

$$\left(1-\frac{2\zeta}{h}\right)=\left(1-\frac{2r}{h}\right)^n$$

$$\therefore 2r=h\left(1-\sqrt[n]{1-\frac{2\zeta}{h}}\right)$$

となり，n個の等円径は三角形の高さhと大円径ζによってきまることが分かる．

これがマキノ町天神社 第七問への解答である．

ところで，算題［B5］では，

$n-1=$ 乗

$$中勾\left(1-\sqrt[乗]{1-\frac{全}{中勾}}\right)=等径$$

となっているが，$x^3=$ 再乗冪

$x^4=$ 三乗冪

を表わすので，開方式の場合も，たとえば

$\sqrt[再]{x}$ とあるときは，$\sqrt[3]{x}$

を表わしていると考えてよい．

また，等円径は（ζとhではなく）三斜を用いても表わせる．

等円径 $\Leftarrow$（大円径＋中鈎）$\Leftarrow$ 三斜

$$\begin{cases} S=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \\ 2s=a+b+c \end{cases}$$

を用いて，

$$S=\frac{ah}{2}=\frac{\zeta}{2}(a+b+c)=\zeta s$$

から，

$$h=\frac{2S}{a},\quad \zeta=\frac{S}{s}.$$

よって，

$$\left(1-\frac{a}{s}\right)=\left(1-\frac{a}{S}r\right)^n,$$

$$1-\frac{a}{S}r=\sqrt[n]{1-\frac{a}{s}}.$$

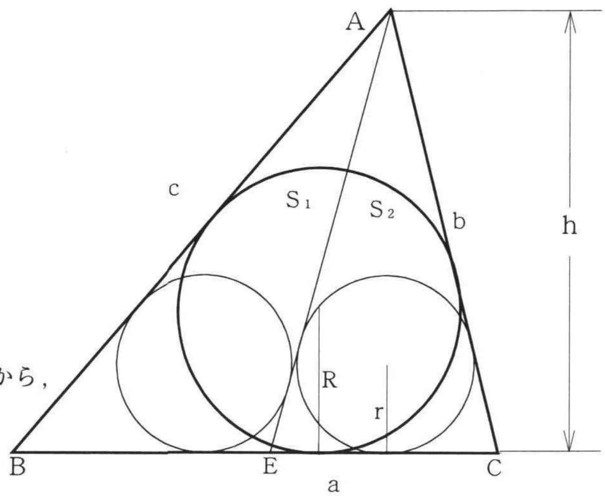
とくに，$n=2$ のとき

$$\begin{aligned} r&=\frac{S}{a}\left(1-\sqrt{\frac{s-a}{s}}\right) \\ &=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{a}\cdot\frac{\sqrt{s}-\sqrt{s-a}}{\sqrt{s}} \\ &=\frac{\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)}}{\sqrt{s}+\sqrt{s-a}}. \end{aligned}$$

☆一般公式から界斜を導びく

一般公式から［B1］昆陽寺 第七問，［B2］光明寺に答える．

二等円と大円の半径rとRに関しては，三角形の高さをhとおくと，



$$\left(1-\frac{2r}{h}\right)^2=\left(1-\frac{2R}{h}\right).\qquad (※)$$

⊿ABE, ⊿AEC, ⊿ABC の面積をそれぞれ，S_1，S_2，Sとすると，

$$S_1=\frac{r}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BE}+\mathrm{AE})$$

$$S_2=\frac{r}{2}(\mathrm{AE}+\mathrm{CE}+\mathrm{AC})$$

$$S=\frac{R}{2}(\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{AC})$$

これらの三角形の面積の関係 $S_1+S_1=S$から，

$$\frac{r}{2}(a+b+c+2\mathrm{AE})=\frac{R}{2}(a+b+c)$$

$$r(s+\mathrm{AE})=Rs$$

$$\therefore\ \mathrm{AE}=s\left(\frac{R}{r}-1\right)$$

一方，

$S=Rs=\dfrac{ah}{2}$ を（※）に代入して，

$$\left(1-\frac{ra}{Rs}\right)^2=\left(1-\frac{a}{s}\right)$$

$$\therefore\ 1-\frac{ra}{Rs}=\sqrt{1-\frac{a}{s}}$$

$$\frac{ra}{Rs}=1-\sqrt{1-\frac{a}{s}}$$

$$\frac{Rs}{ra}=\frac{1}{1-\sqrt{1-\frac{a}{s}}}=\frac{1+\sqrt{1-\frac{a}{s}}}{1-\left(1-\frac{a}{s}\right)}=\frac{s}{a}\left(1+\sqrt{1-\frac{a}{s}}\right)$$

$$\therefore\ \frac{R}{r}=1+\sqrt{1-\frac{a}{s}}$$

$$\therefore\ \mathrm{AE}=s\sqrt{1-\frac{a}{s}}=\sqrt{s(s-a)}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(c+b+a)(c+b-a)}=\frac{1}{2}\sqrt{(c+b)^2-a^2}$$

これは，もちろん，前述の埼玉・光明寺における大原茂氏の三斜 ⇒ 界斜と同じ結果を与える．

このように，全体を通してみると，［B1］～［B4］は，問題文，術文の内容から見て，3．のように直接的に解くことを求めた問題であり，［B5］は，一般公式を用いることを期待した出題であることが分かる．

（等円術Ⅱ—三斜等円術（一般公式）—の項　終わり）