無限期間モデルにおけるナッシュ概遂行可能性について

鮫島 裕輔

1　はじめに

本稿は、無限期間モデルにおけるナッシュ概遂行可能性を定義し、社会に属する人々が３人以上いる場合、任意の社会選択対応がナッシュ概遂行可能であることを示す。本稿は、無限期間モデルにおける厳密な意味でのナッシュ遂行を考察した鮫島 (2007) とは異なり、「一部の期間を除いた残りすべての期間で遂行すること」を意図するナッシュ概遂行を考察する。遂行可能性の概念をナッシュ遂行からナッシュ概遂行へと緩めることで、遂行可能な社会選択対応の範囲はマスキン単調性を満たすものから任意の社会選択対応へと拡大する。

社会選択対応とは、人々の選好プロファイルを与えると社会的に望ましい選択肢の集合を返す多値関数である。この社会的に望ましい選択肢を人々が参加するゲームの均衡の結果として実現しようとするのが遂行理論である。遂行理論では、各人は選択肢に対してさまざまな選好を持つ可能性があることを前提とする。人々の選好プロファイルが異なれば、社会的に望ましい選択肢の集合も違ってくるし、他方、ゲームのなかで人々が選ぶ行動も違ってくる。ただし、ゲームのルール (これをゲームフォームと呼ぶ) を適切に設計すると、どのような選好プロファイルに対しても、ゲームの均衡で実現する選択肢の集合と社会的に望ましい選択肢の集合を一致させることができる場合がある。このとき社会選択対応は遂行可能であるという。

遂行に用いる均衡概念に応じて遂行可能な社会選択対応の範囲が変わることは、遂行理論の諸研究によって明らかにされてきた。Gibbard (1973) および Satterthwaite (1975) は、支配戦略均衡で遂行可能な社会選択関数は、選好順序に制限がない場合は独裁的社会選択関数に限られることを示した。Maskin (1999) や Moore and Repullo (1990) や Danilov (1992) は、マスキン単調性よりも少し強い条件を満たす社会選択対応については、ナッシュ均衡で遂行可能であることを示した。Moore and Repullo (1988) や Abreu and Sen (1990) は、部分ゲーム完全均衡を遂行に用いると、社会選択対応がマスキン単調性を満たさなくとも、それより弱い条件を満たしさえすれば遂行可能であることを示した。

このように、遂行に用いる均衡概念を変えることによって遂行可能な社会選択対応の範囲を拡大することができる。しかし、「社会的に望ましい選択肢そのものを実現する」という厳密な意味での遂行を意

図する限り、どの均衡概念を採用したとしても、あらゆる社会選択対応を遂行可能にすることは難しい。

そこで「厳密な意味での遂行」から離れることによって遂行可能な社会選択対応の範囲を広げようとする研究も行われてきた。例えば、Abreu and Sen (1991) は、選択肢を確率的に選べるような状況において、望ましい選択肢に確率的に限りなく近い状態を遂行するという virtual implementation を考案した。そして、任意の社会選択対応がナッシュ均衡で virtually に遂行可能であることを示した。また、Kalai and Ledyard (1998) は多期間を通じて社会選択を実現するような状況において、支配戦略均衡を用いて、十分に長い期間を経た後に望ましい選択肢を実現するという patiently dominance implementation を考案した。そして、任意の社会選択関数がこの意味で遂行可能であることを示した。

本稿も「厳密な意味での遂行」から離れることによって遂行可能な社会選択対応の範囲を広げようとするアプローチをとる。本稿は、Kalai and Ledyard (1998) と同様の無限期間モデルを考察し、「ナッシュ概遂行可能性」を検討する。ナッシュ概遂行可能性は、Kalai and Ledyard (1998) が考案した遂行可能性で使われる均衡概念を支配戦略均衡からナッシュ均衡へと置き換えたものに相当する。社会選択対応がナッシュ概遂行可能であるとは、無限期間を通じて社会選択を実現するような状況において、ナッシュ均衡を用いて、有限個の一部期間を除いた残りすべての期間で、社会選択対応が定める望ましい選択肢を実現できることを意味する。本稿は、社会に属する人々が 3 人以上いる場合、任意の社会選択対応がナッシュ概遂行可能となるようなゲームフォームを提示する。

以下に、本稿のゲームフォームの特長を二点挙げる。

第一は、均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準を、社会的に望ましい水準にいくらでも近づけることができるという点である。Kalai and Ledyard (1998) が提案したゲームフォームでは、無限に続く期間の遠い将来に望ましい選択肢を実現するために、各プレイヤーの選好タイプを判別するための「テスト期間」を第 1 期に配置したうえ、テスト期間後に十分な長さの冷却期間をとらなければならないという制約があった。この制約のため Kalai and Ledyard (1998) のゲームフォームでは、均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準が、望ましい選択肢そのものから得られる通時的効用水準とは大きく乖離する。これに対し本稿のゲームフォームでは、テスト期間を無限期間の任意の第 τ 期に配置することが許されるため、τ を十分に大きくすれば (十分に遠い将来にテスト期間を配置すれば)、均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準を、望ましい選択肢そのものから得られる通時的効用水準にいくらでも近づけることができる。この点は、遂行に用いる均衡概念を支配戦略均衡からナッシュ均衡に緩めたことから得られた利点であるといえる。

第二は、あらゆる社会選択対応がナッシュ概遂行可能である点である。この点は、本稿と同様の無限期間モデルについて、厳密な意味でのナッシュ遂行を分析した鮫島 (2007) の結果とは対照的である。鮫島 (2007) では、ナッシュ遂行可能な社会選択対応はマスキン単調性を満たすものに限られることが示されている。これに対し本稿では、遂行可能性の概念をナッシュ遂行からナッシュ概遂行へ緩めたことと引き換えに、遂行可能な社会選択対応の範囲があらゆる社会選択対応へと拡大することが示される。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、無限期間モデルを説明し、この枠組みにおける社会選

択対応、ゲームフォーム、およびナッシュ概遂行可能性を定義する。第 3 節では、社会に属する人々が 3 人以上いる場合、任意の社会選択対応がナッシュ概遂行可能であることを示す。第 4 節では、結論を述べる。

2 モデル

以下の無限期間モデルは Kalai and Ledyard (1998) や 鮫島 (2007) と同様の枠組みを用いている。

社会的な選択肢の集合を A とし、その要素を選択肢 a などと呼ぶ。

人々の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし、その要素をプレイヤー i などと呼ぶ。N は有限集合で少なくとも 3 人以上を含む。

各人は社会的な選択肢に対してさまざまな選好を持つ可能性があり、それに対応した選好タイプに分けられる。ただしどの選好タイプにおいても選好は完備性、推移性、連続性を満たすものとする。プレイヤー i が分類されうる選好タイプの集合を Θ_i とし、その要素をタイプ θ_i などと呼ぶ。タイプの集合 Θ_i は有限とする。プレイヤー達のタイプの集合の直積を $\Theta = \prod_{i=1}^{n} \Theta_i$ とし、その要素をタイププロファイル $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ などと呼ぶ。

プレイヤー i の効用関数を $u_i \colon \Theta_i \times A \to \mathbb{R}$ で表す。ただし $\mathbb{R}$ は実数の集合を表す。例えばタイプ θ_i を持つプレイヤー i の選択肢 a に対する効用は $u_i(\theta_i, a)$ となる。どのプレイヤーのどのタイプの効用関数も有界であるとする。本稿では Kalai and Ledyard (1998) と同様に、相異なる二つのタイプについてはテストペアと呼ばれる選択肢の組が存在すると仮定する。

仮定 (テストペアの存在). 任意の $i \in N$、任意の $\theta_i, \bar{\theta}_i \in \Theta_i$ について、もし $\theta_i \neq \bar{\theta}_i$ ならば、$u_i(\theta_i, x) < u_i(\theta_i, y)$ かつ $u_i(\bar{\theta}_i, x) > u_i(\bar{\theta}_i, y)$ となるような選択肢の組 $T_{\theta_i, \bar{\theta}_i} = \{x, y\}$ が存在する。[*1]

あらゆるテストペアに含まれる選択肢の集合を

$$T = \bigcup_{\substack{i \in N \\ \theta_i \in \Theta_i \\ \bar{\theta}_i \in \Theta_i \setminus \{\theta_i\}}} T_{\theta_i, \bar{\theta}_i}$$

と表記する。

ここまでは一期間における選択肢と人々の効用に関する記述である。次に無限期間モデルについて記す。期間は第 1 期から始まって第 2 期、第 3 期、、、と永遠に続く。

社会的な選択肢は各期とも A から選ぶものとし、第 t 期のために選んだ選択肢は a^t などと表す。人々は、選択肢の無限列 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ を直積集合 $A^\infty = \prod_{t=1}^{\infty} A$ から選ぶことになる。この集合の要素を無限列 $\mathbf{a}$ や無限列 $\mathbf{b}$ などと呼ぶ。

プレイヤー i が将来の効用を現在価値に直すための割引因子を $\delta_i \in (0, 1)$ とする。割引因子は厳密

---

*1 テストペアの存在を仮定することで、モデルが扱えるタイプの集合は一定の制限を受ける。詳細は Kalai and Ledyard (1998) に議論されている。

に0より大きく1より小さい。以下では、 Kalai and Ledyard (1998) と同様に、各プレイヤーの割引因子を固定して議論を進める。

タイプ θ_i を持つプレイヤー i の 無限列 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ に対する効用は、記号の乱用を許すことにして、

$$u_i(\theta_i, \mathbf{a}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} u_i(\theta_i, a^t)$$

と記述する。

社会選択対応 $\varphi\colon \Theta \rightrightarrows A^\infty \setminus \{\emptyset\}$ とは人々のタイププロファイル θ を与えると社会的に望ましい無限列の集合 $\varphi(\theta)$ が定まるような多値関数である。Kalai and Ledyard (1998) は人々のタイププロファイル θ を与えると一つの無限列 $o(\theta) \in A^\infty$ が定まるような社会選択関数を考察しているが、本稿の社会選択対応はこのような社会選択関数を特殊ケースとして扱うことができる。

ゲームフォームとは、各プレイヤーの戦略空間 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ と帰結関数 $g\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to A^\infty$ の組み合わせである。これは言わば社会に属する人々が参加するゲームのルールである。ゲームフォームでは、各プレイヤー i があらかじめ定められた戦略空間 S_i から戦略 s_i を選ぶ。すると戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ に応じて選択肢の無限列 $g(s) = (g^1(s), g^2(s), \ldots, g^t(s), \ldots) \in A^\infty$ が一つ決まり、ゲームのルールに従ってこれを社会的な決定として将来にかけて遂行することになる。ここで無限列 $g(s)$ の t 番目にある選択肢を $g^t(s)$ と表記することに注意する。なお、戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ のうちプレイヤー i の戦略を s_i から s_i' へと置き換えて得られる新しい戦略プロファイルは $(s_i', s_{-i}) = (s_1, s_2, \ldots, s_i' \ldots, s_n)$ などと記述する。

本稿では次に定義されるナッシュ概遂行可能性を考察する。

定義 (ナッシュ概遂行可能性). ある社会選択対応 φ について、2つの自然数 τ_1 および $\tau_2 > \tau_1$ ならびに次の2つの条件を満たすゲームフォーム $(S_1, S_2, \ldots, S_n, g)$ が存在するとき、社会選択対応 φ は第 τ_1 期から第 τ_2 期までを除きナッシュ概遂行可能であるという。

(条件 1) 任意の $\theta \in \Theta$ および任意の $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots) \in \varphi(\theta)$ について、次を満たす $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ が存在する。

$t < \tau_1$ または $t > \tau_2$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ であり、かつ

$u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ の任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つ。

(条件 2) 任意の $\theta \in \Theta$ および任意の戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ について、次が成り立つ。

もし $u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i}))$ が

任意の $i \in N$ および任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つならば、

$t < \tau_1$ または $t > \tau_2$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ となるような

$\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots) \in \varphi(\theta)$ が存在する。

定義中にある第 τ_1 期から第 τ_2 期までをテスト期間と呼ぶ。(条件 1) の意味は、どんなタイププロファイルが与えられた場合でも、任意の社会的に望ましい無限列とテスト期間以外の部分で一致する無

限列を実現するような、純粋戦略ナッシュ均衡が存在するということである。(条件 2) の意味は、どんなタイププロファイルが与えられた場合でも、純粋戦略ナッシュ均衡が存在するとすれば、その結果として、何らかの社会的に望ましい無限列とテスト期間以外の部分で一致するような無限列が実現するということである。

Kalai and Ledyard (1998) が検討した遂行可能性 (patiently dominance implementability) は、社会選択対応ではなく社会選択関数を対象とし、本稿の遂行可能性の定義中で使われる均衡概念を支配戦略均衡に変えたうえ、$\tau_1 = 1$ としたものに相当する。

3 分析

以下に本稿が証明する命題を記す。命題の記述のなかの第 τ 期はテスト期間が始まる期である。この τ は任意の自然数としてよいため、τ を十分に大きくすれば (十分に遠い将来にテスト期間を配置すれば)、各プレイヤーがテスト期間部分から得る効用の現在価値をいくらでも小さくすることができる。つまり、τ を大きくすることによって、ナッシュ均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準を、社会選択対応に属する無限列から得られる通時的効用水準にいくらでも近づけることができる。この点、ならびにナッシュ概遂行可能な社会選択対応に制限がないことが、本命題の特長である。

命題. プレイヤーが 3 人以上いるとき、任意の社会選択対応 φ は、任意の第 τ 期から第 $(\tau + |T| - 1)$ 期までを除きナッシュ概遂行可能である。

証明. 任意の自然数 τ を選び固定する。テストペアに含まれる選択肢の集合 T の要素を任意の順序に並べて順序を固定し、

$$T = \{x^1, x^2, \ldots, x^{|T|}\}$$

と表記する。

ゲームフォーム $(S_1, S_2, \ldots, S_n, g)$ を以下のように定義する。

- 各プレイヤー i の戦略空間を $S_i = \Theta \times A^\infty \times \mathbb{N}$ とする。ただし $\mathbb{N}$ は自然数の集合である。例えば、プレイヤー i の戦略 $s_i = (\theta^i, \mathbf{a}^i, k^i)$ に含まれる項目は、タイププロファイル θ^i、選択肢の無限列 $\mathbf{a}^i$、および自然数 k^i である。ここで右上の添字 i は、プレイヤー i が戦略として選んだことを意味する。タイププロファイル θ^i には、全員分のタイプが含まれることに注意する。
- 帰結関数 $g\colon S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to A^\infty$ を次のように定義する。

Case 1. 何らかの $(\theta, \mathbf{a}, k)$ (ここで $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ とする) について $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\theta, \mathbf{a}, k)$ であり、かつ $\mathbf{a} \in \varphi(\theta)$ である場合、$g(s)$ を次のように定義する。

- $t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ とする。
- $\tau \leq t < \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = x^{t-\tau+1}$ とする。

Case 2. プレイヤー i 以外の任意のプレイヤー $j \neq i$ が何らかの共通の戦略 $s_j = (\theta, \mathbf{a}, k)$ (ここで

$\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$, $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n)$ とする) をとり、かつ $\mathbf{a} \in \varphi(\theta)$ である一方で、プレイヤー i だけが異なる戦略 $s_i = (\theta^i, \mathbf{b}^i, k^i) \neq (\theta, \mathbf{a}, k)$ (ここで $\theta^i = (\theta^i_1, \theta^i_2, \ldots, \theta^i_n)$ とする) をとる場合、

- $t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ とする。
- $\tau \leq t < \tau + |T|$ を満たす t について
  (a) もし $\theta_i \neq \theta^i_i$ かつ $x^{t-\tau+1} \in T_{\theta_i, \theta^i_i}$ であり、このテストペア T_{θ_i, θ^i_i} に含まれるもう一つの選択肢 $y \in T_{\theta_i, \theta^i_i}$ について $u_i(\theta^i_i, x^{t-\tau+1}) < u_i(\theta^i_i, y)$ が成り立つならば、$g^t(s) = y$ とする。このとき、テストペアの定義より $u_i(\theta_i, x^{t-\tau+1}) > u_i(\theta_i, y)$ が成り立つことに注意する。
  (b) 上の (a) が当てはまらない場合、 $g^t(s) = x^{t-\tau+1}$ とする。

Case 3. 上の Case 1 も Case 2 も当てはまらない場合、
$i^* = \max\{\ i \mid k^i = \max_j k^j\}$ で定義されるプレイヤー i^* が選んだ無限列 $\mathbf{a}^{i^*} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ と 自然数 k^{i^*} を用いて、$g(s)$ を次のように定義する。

- $t < k^{i^*}$ または $t \geq k^{i^*} + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ とする。
- $k^{i^*} \leq t < k^{i^*} + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = x^{t-k^{i^*}+1}$ とする。

Case 1 は全員が同一の戦略を選んでいて、そこに含まれるタイププロファイル θ のもとで無限列 $\mathbf{a}$ が社会的に望ましいケースである。このときに遂行する無限列は、第 τ 期から第 $(\tau + |T| - 1)$ 期までのテスト期間を除き、$\mathbf{a}$ と一致する。ただしテスト期間中は、テストペアに含まれる選択肢を順番に遂行する。

Case 2 は Case 1 の状態から一人プレイヤー i だけが他の全員とは異なる戦略に変えたケースである。プレイヤーが 3 人以上いるので Case 2 の定義に曖昧さは生じない。そのプレイヤー i が Case 1 で定義されたものと異なる無限列をもたらせるのは、自分が報告した自分のタイプ θ^i_i が、他人によって報告された自分のタイプ θ_i と異なる場合のみである。この場合、Case 1 の無限列との違いはテスト期間中に現れる。具体的には、テストペア T_{θ_i, θ^i_i} に含まれる選択肢のうち、タイプ θ^i_i にとって好ましくない方の選択肢は、もう一つのより好ましい方の選択肢に置き換えられることになる。

Case 3 は上の両ケースに当てはまらない場合で、このときは、最も大きい自然数を戦略に組み込んだプレイヤーのうち最大のインデックスを持つ者 i^* が選んだ無限列 $\mathbf{a}^{i^*}$ の一部をテスト期間としたものを社会的な決定とする。ただしテスト期間は第 k^{i^*} 期から始まるものとする。

次に、上に定義したゲームフォームがナッシュ概遂行可能性の (条件 1) と (条件 2) を満たすことを示す。まず、補題 1 で (条件 1) を議論する。

補題 1. 任意の $\theta \in \Theta$ および任意の $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots) \in \varphi(\theta)$ について、もし各プレイヤー i が $s_i = (\theta, \mathbf{a}, 1)$ を選んだならば、$t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ であり、かつ戦略プロファイル s はナッシュ均衡となっている (すなわち $u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s'_i, s_{-i}))$ が任

意の $i \in N$ の任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つ)。

補題 1 にあるように全員が同一の戦略を選んだ場合、Case 1 が適用されるので $t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ となる。

ここで、あるプレイヤー i が逸脱して戦略 $s_i' = (\theta^i, \mathbf{b}^i, k^i) \neq (\theta, \mathbf{a}, 1)$ をとる場合、Case 2 が適用されるが、$g(s) \neq g(s_i', s_{-i})$ となるのは $\theta_i^i \neq \theta_i$ である場合のみである。この場合、$g^t(s) \neq g^t(s_i', s_{-i})$ となる第 t 期では Case 2 の (a) が適用されているので、その定義より $u_i(\theta_i, g^t(s)) > u_i(\theta_i, g^t(s_i', s_{-i}))$ が成り立つ。従って Case 2 の (b) が適用されている場合も併せて、$u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i}))$ が成り立つ。

(補題 1 の証明終)

次に、補題 2 と補題 3 でゲームフォームが (条件 2) を満たすことを示す。

補題 2. 任意の $\theta \in \Theta$ について、もし戦略プロファイル s がナッシュ均衡であるならば (すなわち $u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ および任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つならば)、Case 1 が適用されている。

補題 1 よりナッシュ均衡が存在して、それに Case 1 が適用されうることがわかっているので、ナッシュ均衡に Case 2 および Case 3 が適用されないことを示せばよい。

任意のタイププロファイル θ および任意の戦略プロファイル s を選んで固定し、この戦略プロファイルに Case 2 もしくは Case 3 が適用されているとする。Case 2 が適用されているときは一人のプレイヤーだけが残り全員とは異なる戦略をとっているが、このときは「残り全員」から任意のプレイヤーを一人選んでプレイヤー i とする。Case 3 が適用されているときは任意のプレイヤーを一人選んでプレイヤー i とする。

まず、タイプ θ_i のもとでプレイヤー i の選好が飽和する場合を考える。すなわち $u_i(\theta_i, a) \geq u_i(\theta_i, b)$ が任意の $b \in A$ について成り立つような選択肢 a があるとする。ここで選択肢 a だけを繰り返す無限列 $\mathbf{a} = (a, a, a, \ldots)$ と無限列 $g(s)$ を比較する。無限列 $g(s)$ のテスト期間に対応する部分では、θ_i と任意の $\bar{\theta}_i \in \Theta_i \setminus \{\theta_i\}$ に関するテストペア $T_{\theta_i, \bar{\theta}_i} = \{x, y\}$ に属する選択肢が両方とも現れるが、これらの選択肢について $u_i(\theta_i, a) \geq u_i(\theta_i, x) > u_i(\theta_i, y)$ もしくは $u_i(\theta_i, a) \geq u_i(\theta_i, y) > u_i(\theta_i, x)$ のいずれかが成り立つ。従って $u_i(\theta_i, \mathbf{a}) > u_i(\theta_i, g(s))$ となる。いまプレイヤー i が、他の誰よりも大きい自然数 k^i を選んで、戦略を s_i から $s_i' = (\theta, \mathbf{a}, k^i)$ に変えたとすると、Case 3 が適用される。プレイヤー i は自然数 k^i を十分に大きくすれば、効用 $u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i}))$ をいくらでも $u_i(\theta_i, \mathbf{a})$ に近づけることができるので、そのような s_i' について $u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i})) > u_i(\theta_i, g(s))$ が成り立つ。

次に、タイプ θ_i のもとでプレイヤー i の選好が飽和しない場合を考える。この場合、タイプ θ_i にとって $g(s)$ よりも好ましい無限列が存在することは明らかで、プレイヤー i がこの無限列と十分に大きい自然数を組み込んだ戦略 s_i' をとるときは Case 3 が適用され、$u_i(\theta_i, g(s_i', s_{-i})) > u_i(\theta_i, g(s))$ が成り立つ。

(補題 2 の証明終)

補題 3. 任意の $\theta \in \Theta$ について、もし戦略プロファイル s がナッシュ均衡であって（すなわち $u_i(\theta_i, g(s)) \geq u_i(\theta_i, g(s'_i, s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ および任意の $s'_i \in S_i$ について成り立ち）、かつ Case 1 が適用されているならば、$t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = a^t$ となるような無限列 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots) \in \varphi(\theta)$ が存在する。

戦略プロファイル s に Case 1 が適用されているので、$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\hat{\theta}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{k})$ かつ $\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\hat{\theta})$ であるとしてよい。ここで $\hat{\mathbf{a}} = (\hat{a}^1, \hat{a}^2, \ldots, \hat{a}^t, \ldots)$ とすると、$t < \tau$ または $t \geq \tau + |T|$ を満たす t について $g^t(s) = \hat{a}^t$ である。あとは $\hat{\theta} = \theta$ を示せば $\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\theta)$ となるので補題 3 を証明したことになる。

以下では背理法を用いて $\hat{\theta} = \theta$ を示す。あるプレイヤー i について $\hat{\theta}_i \neq \theta_i$ であるとする。ここでプレイヤー i が戦略プロファイル s から逸脱して戦略を $s'_i = (\theta, \hat{\mathbf{a}}, \hat{k})$ に変えると Case 2 が適用される。このとき $g(s)$ と $g(s'_i, s_{-i})$ との間に違いが生じるのは、テスト期間中に現れるテストペア $T_{\theta_i, \hat{\theta}_i}$ に属する選択肢に関してのみである。すなわち、Case 2 の (a) の定義より、もし $g^t(s) \neq g^t(s'_i, s_{-i})$ であるならば、$T_{\theta_i, \hat{\theta}_i} = \{g^t(s), g^t(s'_i, s_{-i})\}$ かつ $u_i(\theta_i, g^t(s)) < u_i(\theta_i, g^t(s'_i, s_{-i}))$ となっている。従って $u_i(\theta_i, g(s)) < u_i(\theta_i, g(s'_i, s_{-i}))$ が成り立つ。これは戦略プロファイル s がタイププロファイル θ のもとでナッシュ均衡であることに矛盾する。　(補題 3 および 命題の証明終)

4 結論

本稿は、無限期間モデルにおけるナッシュ概遂行可能性を定義し、社会に属する人々が 3 人以上いる場合について考察した。本稿が示した命題の特長は次の二点である。

第一は、任意の社会選択対応がナッシュ概遂行可能であることを示した点である。この点は、本稿と同様の無限期間モデルを分析した鮫島 (2007) が、厳密な意味でナッシュ遂行可能な社会選択対応はマスキン単調性を満たすものに限られるとした結果とは異なっている。

第二は、ナッシュ均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準は、社会的に望ましい水準にいくらでも近づけられることを示した点である。この点は、無限期間モデルで支配戦略均衡を用いた遂行可能性 (patiently dominance implementability) を分析した Kalai and Ledyard (1998) のゲームフォームにおいて、均衡におけるプレイヤーの通時的効用水準が、望ましい水準と大きく乖離するのとは対照的となっている。

これらの特長は、それぞれ遂行可能性の概念を厳密な意味でのナッシュ遂行からナッシュ概遂行へと緩めたこと、ならびに遂行に用いる均衡概念を支配戦略均衡からナッシュ均衡へと緩めたことから生じた利点であるといえよう。

参考文献

[1] 鮫島裕輔 (2007). 「多期間モデルにおけるナッシュ遂行の分析」, 東洋大学経済論集, 第 33 巻第 1 号.

[2] Abreu, D., and Sen, A. (1990). "Subgame Perfect Implementation: A Neccesary and Almost Sufficient Condition," *Journal of Economic Theory* 50, 285–299.

[3] Abreu, D., and Sen, A. (1991). "Virtual Implementation in Nash Equilibrium," *Econometrica* 59, 997–1021.

[4] Danilov, V. (1992). "Implementation via Nash Equilibria," *Econometrica* 60, 43–56.

[5] Gibbard, A. (1973). "Manipulation of Voting Schemes: A General Result," *Econometrica* 41, 587–601.

[6] Kalai, E., and Ledyard, J. O. (1998). "Repeated Implementation," *Journal of Economic Theory* 83, 308–317.

[7] Maskin, E. (1999). "Nash Equilibrium and Welfare Optimality," *Review of Economic Studies* 66, 23–38.

[8] Moore, J., and Repullo, R. (1988). "Subgame Perfect Implementation," *Econometrica* 56, 1191–1220.

[9] Moore, J., and Repullo, R. (1990). "Nash Implementation: A Full Characterization," *Econometrica* 58, 1083–1099.

[10] Satterthwaite, M. A. (1975). "Strategy-Proofness and Arrow's Conditions: Existence and Correspondence Theorems for Voting Procedures and Social Welfare Functions," *Journal of Economic Theory* 10, 187–217.