◆◆ **技術報告** ◆◆

ヒルベルト空間上の有界線形作用素，とくに作用素の幾何平均の研究

山崎　文明*

1. はじめに

ヒルベルト空間論は，フレドホルムの積分方程式論やフーリエ級数などの理論を統合して，固有値問題を一般的に取り扱うために生まれた理論である．とくに，フォン・ノイマンによる量子力学の基礎付けにおいてヒルベルト空間論は現在のように整備された．ヒルベルト空間は簡単に言うと，内積の定義された完備なベクトル空間のことである．代表的な例として，有限次元のユークリッド空間が挙げられる．また，無限次元の代表的な例としては，l^2 空間（$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots) \mid x_n \in \mathbb{C}, \sum_{n=1}^{\infty} | x_n |^2 < +\infty\}$）（$\mathbb{C}$ は複素数）や L^2 空間（$\{f:[0,1] \to \mathbb{C}$, 連続関数 $| \int_0^1 | f(t) |^2 dt < +\infty\}$）が挙げられる．なお，ヒルベルト空間は，他にも多くの具体例があるが，ほとんどの場合，それらは有限次元のユークリッド空間か l^2 空間と同型（空間として同じ構造を持つ）である．すなわち，ヒルベルト空間の議論をする際には，有限次元のユークリッド空間や l^2 空間をイメージしながら議論をするとよい．

ヒルベルト空間上の有界線形作用素の代表的な例は行列である．一方，無限次元のヒルベルト空間上の有界線形作用素は，無限次元の行列をイメージすればよいが，必ずしも行列と同様のことは言えない．本稿では，最初に，ヒルベルト空間上の有界線形作用素の性質，特に，作用素の順序関係について説明をする．最後に，筆者の最近の研究である，作用素の幾何平均に関する結果を紹介する．以下，有界線形作用素を，単に線形作用素，もしくは作用素と呼ぶ．

2. 線形作用素の基本的な性質

線形代数学にあるように，正規行列はユニタリ行列を使って対角化をすることができ，任意の行列は，可逆な行列を使ってジョルダン標準形に変形することができる．これを一般の作用素の場合で考えると，作用素 T が正規作用素であれば，

$$\mathrm{T} = \int_{\sigma(\mathrm{T})} \lambda \; dE_{\lambda}$$

と表すことができる．ここで，$\sigma(T)$ は T のスペクトルで，E_λ は T に対するスペクトル測度とする．これを作用素 T のスペクトル分解と呼ぶ．スペクトル分解は，n 次正方行列の場合は次のようになる．T を n 次正方行列とする．T を正規行列とすれば，あるユニタリ行列 T を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{T} &= \mathrm{U} \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix} U^* \\ &= \lambda_1 \mathrm{UP_1} U^* + \lambda_2 UP_2 U^* + \cdots + \lambda_n UP_n U^*\end{aligned}$$

とできる．ここで，P_i (i=1, 2, ..., n) は (i, i) 成分のみ 1 で，残りのすべての成分が 0 である行列とする．さらに，$\mathrm{E}_i = \sum_{k=1}^{i} UP_k U^*$ と置けば，各 E_i は射影となり，

$$\mathrm{T} = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k (E_k - E_{k-1})$$

となる．上式において，$n \to +\infty$ とすれば，定積分の定義から線形作用素のスペクトル分解が理解できる．作用素のスペクトル写像定理は行列と同様に成り立つので，正規作用素のスペクトル解析は完全に解明された．ところが，一般の作用素に対して，そのジョルダン標準形を求めることはできない．ジョルダン標準形と同様に重要な概念として，行列のユニタリ三角化もあるが，これに対応する作用素の概念も知られていない．

線形作用素の性質として，作用素の順序関係は重要である．$\mathrm{T} \in \mathrm{B}(H)$ がエルミート作用素とは，$\mathrm{T} = T^*$ が成り立つことと定義する．また，エルミート作用素 A に対して，$\langle Ax, x \rangle \geq 0$ がすべての $x \in \mathrm{H}$ で成り立つとき，A を半正値作用素と呼ぶ（A が行列の場合は，A の固有値がすべて非負であることと同値）．エルミート作用素 A, B に対して，$\mathrm{A} - \mathrm{B} \geq 0$ のとき，$\mathrm{A} \geq \mathrm{B}$ と定義する．作用素の順序関係は，通常の数における順序関係とは異なる．特に，次の定理が知られている．

定理 1（レウナー・ハインツの不等式[11]）
A, B をエルミート作用素とし，$\mathrm{A} \geq \mathrm{B} \geq 0$ が成り立っているとする．このとき，任意の $\alpha \in [0,1]$ に対して，$\mathrm{A}^{\alpha} \geq \mathrm{B}^{\alpha}$ が成り立つ．

*理工学部　電気電子情報工学科

ここで，作用素 A の α 乗は次のように定義される．半正値作用素Aを $A=\int_{\sigma(A)}\lambda\, dE_\lambda$ とスペクトル分解をしたとき，解析関数 f に対して，$f(A)=\int_{\sigma(A)}f(\lambda)dE_\lambda$ と定義する．特に，A が行列の場合は，ユニタリ対角化を用いて定義できる．定理1によれば，行列の順序関係は，数と同じようにはいかないことが分かる．実際，

$$A=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$ とすると，

$$A-B=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}\geq 0$$ より，$A\geq B\geq 0$ であるが，

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}5&3\\3&2\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4&3\\3&2\end{pmatrix}\ngeq 0$$ となり，

$A^2\ngeq B^2$ である．

3. 順序を保存する作用素不等式と幾何平均

定理1から，作用素の順序関係は数の順序関係と比べて，大分制約が強いことがわかる．この制約を緩和する一つの方法として，次の定理が示された．

定理2（古田不等式[7]）
A, B をエルミート作用素とし，$A\geq B\geq 0$ が成り立っているとする．このとき，任意の実数 $r\geq 0$ に対して，

$$\left(A^{\frac{r}{2}}A^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}\geq\left(A^{\frac{r}{2}}B^pA^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$ と

$$\left(B^{\frac{r}{2}}A^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}\geq\left(B^{\frac{r}{2}}B^pB^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$ が $p\geq 1$ で成り立つ．

定理2では，レウナー・ハインツの不等式ではフォローすることができない1以上の指数の場合において，ある種の関数

$$f(\cdot)=\left(A^{\frac{r}{2}}\cdot A^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}} \quad や \quad g(\cdot)=\left(B^{\frac{r}{2}}\cdot B^{\frac{r}{2}}\right)^{\frac{1+r}{p+r}}$$

のもとで，順序が保存されることを言っている．定理2は，作用素の幾何平均と呼ばれる概念と相性が良い．二つの正値作用素 A, B に対して，A と B の重み付き幾何平均 $A\#_\alpha B$ を

$$A\#_\alpha B=A^{\frac{r}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^\alpha A^{\frac{1}{2}},\ \alpha\in[0,1]$$

と定義する．通常，数の場合では正数 a, b に対して，重み付き幾何平均は $a^{1-\alpha}b^\alpha$ と定義されるが，作用素の場合は，積に関して非可換なため，上のような定義となる．もちろん，二つの正値作用素 A, B が可換であれば，$A\#_\alpha B=A^{1-\alpha}B^\alpha$ となる．作用素の幾何平均に関する研究は，多くの結果が知られている．例えば，次の定理は重要である．

定理4[6), 8)]
A, B を正値作用素とする．このとき，$\log A\geq\log B$ ならば，$A\# B\leq I$ が成り立つ．

定理5（安藤－日合の不等式[1)]）
A, B を正値作用素とする．このとき，任意の $\alpha\in[0,1]$ に対して，$A\#_\alpha B\leq I$ ならば，$A^p\#_\alpha B^p\leq I$ が任意の $p\geq 1$ で成り立つ．

定理6[6), 8)]
A, B を正値作用素とする．このとき，次の3条件は同値である．
(1) $\log A\geq\log B$
(2) $A^{-p}\# B^p\leq I$ が任意の $p\geq 0$ で成り立つ．
(3) $A^{-r}\#_{\frac{r}{p+r}}B^p\leq I$ が任意の $p, r\geq 0$ で成り立つ．

さて，作用素の幾何平均の様々な性質が示されているのだが，大きな問題が残っている．それは，3個以上の作用素の場合，どうやったら幾何平均を定義できるのか？という問題である．

4. 3個以上の作用素の幾何平均

3個以上の作用素の幾何平均については，長い間未解決問題であったが，近年，3個以上の作用素に対して幾つかの「良い幾何平均の定義」が与えられるようになってきた．以下，それを紹介する．

4. 1 ＡＬＭ幾何平均

3個以上の作用素の幾何平均を定義するための一つ目のアイディアは，帰納的な方法による．

定理7（ＡＬＭ幾何平均[2)]）
整数 n（$n\geq 2$）とする．n 個の正値作用素 $A_1, A_2, \ldots, A_n$ の幾何平均 $G_{ALM}(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を次のように帰納的に定義できる．
(1) $n=2$ のとき，$G_{ALM}(A_1, A_2)=A_1\# A_2$ で定義する．
(2) $n-1$ のとき，$G_{ALM}(A_1, A_2, \ldots, A_{n-1})$ が定義できた

と仮定をする．

(3) n のとき，各 i，$(i=1,2,\dots,n)$ に対して，作用素列 $\{A_i^{(r)}\}_{r=0}^{\infty}$ を次のように定義する．

$$A_i^{(0)} = A_i \text{ かつ}$$

$$A_i^{(r)} = G_{ALM}(A_1^{(r-1)},\dots,A_{i-1}^{(r-1)},A_{i+1}^{(r-1)},\dots,A_n^{(r-1)})$$

このとき，すべての $i=1,2,\cdots,n$ に対して，$\{A_i^{(r)}\}_{r=0}^{\infty}$ は同じ極限に収束する．

この極限を n 個の正値作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の幾何平均 $G_{ALM}(A_1, A_2, \cdots, A_n)$ と定義する．すなわち，

$$\lim_{r\to\infty} A_i^{(r)} = G_{ALM}(A_1,\dots,A_n)$$

ＡＬＭ幾何平均は次の 10 個の性質を満たす[2]．

（Ｐ1）$A_1, A_2, \dots, A_n$ が可換のとき，$G_{ALM}(A_1,\dots,A_n) = (A_1 \dots A_n)^{\frac{1}{n}}$

（Ｐ2）$a_1, a_2, \dots, a_n$ を正数とする．このとき，$G_{ALM}(a_1A_1,\dots,a_nA_n)=(a_1\cdots a_n)^{\frac{1}{n}}G_{ALM}(A_1,\dots,A_n)$

（Ｐ3）$G_{ALM}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ において，$A_1, A_2, \dots, A_n$ の順序は問わない．

（Ｐ4）$G_{ALM}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ は各 A_i において単調である．すなわち，$A_i \le B_i$ $(i=1,2,\dots,n)$ ならば，$G_{ALM}(A_1, A_2, \dots, A_n) \le G_{ALM}(B_1, B_2, \dots, B_n)$

（Ｐ5）$G_{ALM}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ は各 A_i において連続である．すなわち，$A_1^{(r)} \to A_i$ $(r\to+\infty)$ ならば，$G_{ALM}(A_1^{(r)},\dots,A_n^{(r)}) \to G_{ALM}(A_1,\dots,A_n)$ $(r\to\infty)$

（Ｐ6）$G_{ALM}(A_1^{-1},\dots,A_n^{-1})^{-1} = G_{ALM}(A_1,\dots,A_n)$

（Ｐ7）$G_{ALM}(\lambda A_1 + (1-\lambda)B_1, \cdots, \lambda A_n + (1-\lambda)B_n) \ge \lambda G_{ALM}(A_1,\dots,A_n) + (1-\lambda)G_{ALM}(B_1,\dots,B_n)$

（Ｐ8）可逆な $S \in B(H)$ に対して，$S^* G_{ALM}(A_1, A_2, \dots, A_n)S = G_{ALM}(S^*A_1S, S^*A_2S, \cdots, S^*A_nS)$

（Ｐ9）$\det G_{ALM}(A_1,\dots,A_n) = (\prod_{i=1}^n \det A_i)^{\frac{1}{n}}$

（Ｐ10）$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A_i^{-1}\right)^{-1} \le G_{ALM}(A_1,\dots,A_n) \le \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n A_i$

ただし，（Ｐ9）においては，各 A_i を行列とし，det は行列式とする．ＡＬＭ幾何平均は多くの良い性質を持っており，応用上大変有用であることが期待されるが，実際に計算をするとなると，非常に大変である．この欠点を改善したのが，次の幾何平均である．

4．2　ＢＭＰ幾何平均

ＡＬＭ幾何平均よりも計算速度の速い幾何平均として，次の改良がなされた．

定理 8（ＢＭＰ幾何平均[5),9)]）

整数 n $(n \ge 2)$ とする．n 個の正値作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の幾何平均 $G_{BMP}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ を次のように帰納的に定義できる．

(1) n=2 のとき，$G_{BMP}(A_1, A_2) = A_1 \# A_2$ で定義する．

(2) n-1 のとき，$G_{BMP}(A_1, A_2, \dots, A_{n-1})$ が定義できたと仮定をする．

(3) n のとき，各 i，$(i=1,2,\dots,n)$ に対して，作用素列 $\{A_i^{(r)}\}_{r=0}^{\infty}$ を次のように定義する．

$$A_i^{(0)} = A_i \quad \text{かつ}$$

$$A_i^{(r)} = G_{ALM}(A_1^{(r-1)},\dots,A_{i-1}^{(r-1)},A_{i+1}^{(r-1)},\dots,A_n^{(r-1)}) \#_{\frac{1}{n}} A_i^{(r-1)}$$

このとき，すべての $i=1,2,\dots,n$ に対して，$\{A_i^{(r)}\}_{r=0}^{\infty}$ は同じ極限に収束する．

この極限を n 個の正値作用素 $A_1, A_2, \dots, A_n$ の幾何平均 $G_{BMP}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ と定義する．すなわち，

$$\lim_{r\to\infty} A_i^{(r)} = G_{ALM}(A_1,\dots,A_n)$$

実際，ＢＭＰ幾何平均 $G_{BMP}(A_1, A_2, \dots, A_n)$ の方が早く収束をする．また，ＢＭＰ幾何平均もＡＬＭ幾何平均と同様に性質（Ｐ1）～（Ｐ10）を満たす[5),9)]．

4．3　リーマン幾何平均

次に紹介をする幾何平均は，幾何学的な方法で定義がされている．最初に少し準備をしておこう．なお，ここでの議論はすべて行列に限定をする．$M_m(\mathbb{C})$ を m 次正方行列の集合とする．$A, B \in M_m(\mathbb{C})$ に対して，内積 $\langle A, B\rangle = tr\,A^*B$ とすると，$M_m(\mathbb{C})$ はヒルベルト空間になる（このとき，$\|A\|_2 = \sqrt{\langle A, A\rangle}$ とする）．また，m 次正方行列のうち，正値行列の集合を $P_m(\mathbb{C})$ とすると，$P_m(\mathbb{C})$ は可微分多様体になる．このとき，次が成り立つ．

定理 9[3),4)]

$A, B \in P_m(\mathbb{C})$ とする．このとき，$P_m(\mathbb{C})$ 上に A,B を結ぶ測地線 $\gamma(t)$ が存在する．これは，次のように表現される．

$$\gamma(t) = A\#_tB = A^{\frac{1}{2}}\left(A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right)^t A^{\frac{1}{2}}, \quad t \in [0,1]$$

さらに，測地線に沿った A,B 間の距離は

$\delta_2(A,B) = \left\|\log A^{-\frac{1}{2}}BA^{-\frac{1}{2}}\right\|_2$ で表される．

n 次元行ベクトル $\omega = (w_1, \cdots, w_n)$ が $w_i > 0$ $(i = 1, 2,$

$\cdots, n)$, $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ を満たすとき，ω を確率ベクトルと呼ぶ．

定義（リーマン幾何平均[3), 4), 10), 12)]）
$A_1, A_2, \cdots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$，$\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ を確率ベクトルとする．このとき，$A_1, A_2, \cdots, A_n$ のリーマン幾何平均 $G_\delta(A_1, A_2, \ldots, A_n) \in P_m(\mathbb{C})$ を次のように定義する．

$$G_\delta(\omega; A_1, \ldots, A_n) = \operatorname{argmin} \sum_{i=1}^{n} w_i \delta_2^2(A_i, X)$$

ここで，argmin f(x) とは，f(x) の最小値をとるような x を意味する．

リーマン幾何平均は必ず一意的に存在する[3), 4), 12)]．また，確率ベクトル ω を $\omega = (\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n})$ としたとき，リーマン幾何平均 $G_\delta(\omega; A_1, A_2, \ldots, A_n)$ を $G_\delta(A_1, \ldots, A_n)$ と省略する．$A, B \in P_m(\mathbb{C})$ に対して $G_\delta(1-\alpha, \alpha; A, B) = A \#_\alpha B$ となることはすぐにわかる（リーマン幾何平均は，2つの作用素の幾何平均の拡張になっている）．

リーマン幾何平均には，解析的な表現と代数的な表現方法が知られている．

定理10[12)]
$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$，$\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ を確率ベクトルとする．また，$X = G_\delta(\omega; A_1, \ldots, A_n)$ とする．このとき，X は次の行列方程式の解になっている．

$$\log X^{\frac{-1}{2}} A_1 X^{\frac{-1}{2}} + \cdots + \log X^{\frac{-1}{2}} A_1 X^{\frac{-1}{2}} = 0$$

定理11[10), 13)]
$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$，$\omega = (\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n},)$ とする．また，$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$ からランダムに一つ選ぶ作業を繰り返す．このとき，各 i (i=1,2,⋯) に対して，i 番目に選ばれた行列を X_i とする．ここで，行列の列 $\{M_r\}_{r=1}^{\infty}$ を $M_1 = X_1$, $M_r = M_{r-1} \#_{\frac{1}{r}} X_r$ と定義する．このとき，ほとんど全ての選び方に対して，

$$G_\delta(\omega; A_1, \cdots, A_n) = \lim_{r \to \infty} M_r$$

リーマ幾何平均は上述の（P 1）～（P 10）をすべて満たす．

5. 幾何平均の更なる性質

これらの3個以上の幾何平均は，すべて性質（P 1）～（P 10）を満たすという意味から，良い幾何平均であると考えられる．それでは，これら3種類の幾何平均の中で，どれが一番応用上有用であるか，また数学的に重要であるだろうか？この問題を検討するにあたって，上で定義した幾何平均が性質（P 1）～（P 10）以外にどのような性質を持つのかを調べればよい．当面の目標は定理4～6で紹介したように，2個の作用素の幾何平均の持つ性質がどの程度3個以上の作用素の幾何平均に受け継がれていくのかを調べて行けばよいだろう．

定理12[14)]
$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$, $\omega = (w_1, \ldots, w_n)$ を確率ベクトルとする．このとき，$w_1 \log A_1 + \cdots + w_n \log A_n \le 0$ ならば，$G_\delta(\omega; A_1, \ldots, A_n) \le I$ が成り立つ．

定理12は，定理4を3個以上の幾何平均に拡張したものである．実際，定理4の条件 $\log B \le \log A$ は $\log A^{-1} + \log B \le 0$ と同等であり，$A^{-1} \# B = G_\delta(A^{-1}, B)$ である．

定理13[14)]
$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$, ω を確率ベクトルとする．このとき，$G_\delta(\omega; A_1, \ldots, A_n) \le I$ ならば $G_\delta(\omega; A_1^p, \cdots, A_n^p) \le I$ が任意の $p \ge 1$ で成り立つ．

実際，$A \#_\alpha B = G_\delta(1-\alpha, \alpha; A, B)$ なので，定理13は定理5の拡張である．

次の定理を紹介する前に，次の記号を導入しよう．実数 $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ に対して，$p_{\ne i} = \Pi_{j \ne i}\, p_j$ とする．そして，確率ベクトル ω' を次のように定義する．

$$\omega' = \left(\frac{p_{\ne 1}}{\sum_i p_{\ne i}}, \frac{p_{\ne 2}}{\sum_i p_{\ne i}}, \ldots, \frac{p_{\ne n}}{\sum_i p_{\ne i}} \right)$$

定理14[14)]
$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$ とする．このとき，次の3条件は同値である．

(1) $\log A_1 + \log A_2 + \ldots + \log A_n \le 0$
(2) $G_\delta(A_1^p, A_2^p, \cdots, A_n^p) \le I$ が任意の $p > 0$ で成り立つ．
(3) $G_\delta(\omega'; A_1^{p_1}, A_2^{p_2}, \cdots, A_n^{p_n}) \le I$ が任意の $p_1, p_2, \ldots, p_n > 0$ で成り立つ．

定理14は定理6を多変数の場合に拡張したものである．このように，リーマン幾何平均は2個の作用素の幾何平均の持つ性質のうち，不等式に関する性質を受け継いでいることが分かった．さて，リーマン幾何平均以外の2つの幾何平均は，定理12～定理14と同様な性質を持つだろうか？

定理15[14]

$A_1, \ldots, A_n \in P_m(\mathbb{C})$ とする．また，$G(A_1, \ldots, A_n)$ を性質（P 1）～（P 10）を満たす幾何平均とする．このとき，幾何平均 $G(A_1, \ldots, A_n)$ が定理13の性質を満たすならば，幾何平均 $G(A_1, \ldots, A_n)$ はリーマン幾何平均となる．

さらに，次の具体例から，リーマン幾何平均とその他2種類の幾何平均は一致しないことがわかる．

例3つの2次正方行列を次のように定める．

$$A = \begin{pmatrix} 18 & 5 \\ 5 & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 75 & 54 \\ 54 & 40 \end{pmatrix}$$

このとき，

$$G_1 = G_{ALM}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 9.06732 & 4.86436 \\ 4.86436 & 8.89146 \end{pmatrix}$$

となる．一方，

$$\log G_1^{\frac{-1}{2}} A G_1^{\frac{-1}{2}} + \log G_1^{\frac{-1}{2}} B G_1^{\frac{-1}{2}} + \log G_1^{\frac{-1}{2}} C G_1^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.263706 & -0.0340424 \\ -0.0340424 & 0.263706 \end{pmatrix} \neq 0$$

よって，定理10より，ＡＬＭ幾何平均とリーマン幾何平均は一致しない．また，

$$G_2 = G_{BMP}(A, B, C) = \begin{pmatrix} 9.39875 & 4.91569 \\ 4.91569 & 8.63133 \end{pmatrix}$$

となる．一方，

$$\log G_2^{\frac{-1}{2}} A G_1^{\frac{-1}{2}} + \log G_2^{\frac{-1}{2}} B G_2^{\frac{-1}{2}} + \log G_2^{\frac{-1}{2}} C G_2^{\frac{-1}{2}}$$

$$= \begin{pmatrix} -0.101249 & -0.0568546 \\ -0.0568546 & 0.101249 \end{pmatrix} \neq 0$$

よって，定理10より，BMP幾何平均とリーマン幾何平均は一致しない．

以上のことより，2個の作用素の幾何平均の持つ性質のうち，定理12～14は，リーマン幾何平均でしか成り立たない．

6. まとめ

3個以上の作用素（行列）の幾何平均について紹介してきたが，この研究はまだ始まって月日が浅く，多くの課題が残されている． 特に，3種類の幾何平均の計算量に関する問題は重要である．ＡＬＭ幾何平均やＢＭＰ幾何平均は，定義自身に具体的な計算方法を与えているが，それでも効率的な計算方法が確立されていないため，計算に時間がかかる．今のところ，一番良い性質を備えているリーマン幾何平均に至っては，定理11による計算方法が唯一知られている方法である．しかしながら，実際に計算をしてみるとＡＬＭ幾何平均やＢＭＰ幾何平均とは比較にならない程計算時間がかかる．そこで，各幾何平均を計算するためのより良いアルゴリズムの開発が重要である．もしくは，計算時間の短くて済む幾何平均のうち，性質（P 1）～（P 10）をすべて満たすような幾何平均を新たに定義してもよい．

参考文献

1) Ando T. and Hiai F.: Log majorization and complementary Golden-Thompson type inequalities, Linear Algebra Appl., vol.197, 198 pp. 113-131 (1994).

2) Ando T., Li C.K. and Mathias R.: Geometric means, Linear Algebra Appl., vol. 385 pp.305-334 (2004).

3) Bhatia R.: Positive definite matrices, p.251, Princeton Series in Applied Mathematics, Princeton University Press, Princeton, NJ, (2007).

4) Bhatia R. and Holbrook J.: Riemannian geometry and matrix geometric means, Linear Algebra Appl., vol. 413, pp594-618 (2006).

5) Bini D.A., Meini B. and Poloni F.: An effective matrix geometric mean satisfying the Ando-Li-Mathias properties, Math. Comp., vol.79, pp.437-452 (2010).

6) Fujii M., Furuta T. and Kamei E.: Furuta's inequality and its application to Ando's theorem, Linear Algebra Appl., vol. 179 pp.161--169 (1993).

7) Furuta T.: $A \geq B \geq 0$ ensures $(B^r A^p B^r)^{1/q} \geq B^{(p+2r)/q}$ for $r \geq 0$, $p \geq 0$, $q \geq 1$ with $(1+2r) \geq p+2r$, Proc. Amer. Math. Soc., vol.101, pp.85-88 (1987).

8) Furuta T.: Applications of order preserving operator inequalities, Oper. Theory Adv. Appl., vol.59, pp.180-190 (1992).

9) Izumino S. and Nakamura N.: Geometric means of positive operators II, Sci. Math. Jpn., vol. 69, pp.35-44 (2009).

10) Lawson J.D. and Lim Y.: Monotonic properties of the least squares mean, Math Ann., vol. 351, pp.267-279 (2011).

11) Lowner K.: uber monotone Matrixfunktionen, Math. Z., vol.38, pp.177-216 (1934).

12) Moakher M.: A differential geometric approach to the geometric mean of symmetric positive-definite matrices, SIAM J. Matrix Anal. Appl., vol.26, pp.735-747 (2005).

13) Sturm K.T.: Probability measures on metric spaces of nonpositive curvature, Heat kernels and analysis on manifolds, graphs, and metric spaces, Contemp. Math., vol. 338, pp.357-390 (2003).

14) Yamazaki T.: On properties of geometric mean of n-matrices via Riemannian metric, to appear in Operators and Matrices.