◆◆ 技術報告 ◆◆

リーマン予想とゼータ関数

小 山 信 也*

1．素数の応用

正の整数（自然数）のうち

2，3，5，7，11，13……

のように，自分より小さなどんな数（≠1）でも割り切れない数を，素数という．すべての自然数は素数の積に分解でき，その分解は各々の自然数に対し唯一通りである．これを素因数分解という．素数とは，それ以上分解できない数のことであると言ってもよい．

物質を限りなく細かく分けていった素粒子が物理学の基本的な研究対象であるように，数を極限まで分けた結果である素数は，数学における基本的な研究対象である．最近は，素粒子と素数の間に成り立つ不思議な類似性も観察されている．

素数の研究は紀元前のユークリッドに始まった．以来，素数は数学における主要な研究対象とされてきた．つい数十年前まで数学者が素数を研究する動機は純粋な好奇心のみと考えられていた．素数論に代表される整数論は，「役に立たない純粋数学」の典型とされていた．ところが近年，暗号理論の急速な発展と，インターネット社会における安全な暗号の必要性の増大に伴い，素数の分布問題が大きな応用を持つことがわかってきた．

インターネットでクレジットカード番号を入力して送信する際，番号を傍受されないために暗号化する必要がある．その際に基本となるのが「フェルマーの小定理」として知られる初等整数論の定理である．その内容は「どんな自然数もｐ乗してｐで割ると，余りが元の数に等しくなる」というものである（ただし、ｐは素数）．

ここで「p 乗する」という操作が暗号化に相当し，「p で割る」という操作が暗号の解読に相当する．クレジットカード番号は 16 けたの整数であるが，インターネットで送信する際にはそれをｐ乗した数値を送る．この数値は巨大であり，一見したところ，元の数値とは似ても似つかない．しかし，ｐで割れば元の 16 けたの整数が余りとして得られるというわけである．この場合，ｐという素数がわかれば，暗号を解読できる．ｐという素数が暗号の鍵となっており，これを悪者に悟られないように，送信者と受信者が共有することが必要になる．

不特定多数の利用者がいるインターネット上で，現実にこのような鍵の管理を行なうことは不可能であるから，実際の暗号化は，もう少し複雑な手順で行なわれているが，その根底となる部分で素数が利用されている点は変わらない．そこで，鍵となる素数をいかにして悪者に悟られないようにするかが重要となる．逆に割るものの側から見れば，いかにして鍵となる素数を迅速に見つけるかが死活問題である．そこで，そもそも素数はどれくらいたくさんあるのか，という問題に到達する．

2．歴史的な経緯

素数はどれくらい多く存在するか，あるいは，どれくらいの頻度で出現するかという問題は，純粋数学の中心的な問題として，古くはユークリッドの時代から研究されてきた．紀元前，ユークリッドによって得られた有名な事実として，

素数は無数に存在する．

がある．この事実の証明は初等的であり，高校生にも理解できることから，気の利いた高校の参考書にも載っていたり，過去には大学入試で出題されたりしたこともある．そうした場面で登場する証明は，多くの場合に背理法（仮に素数が有限個しか存在しないと仮定して矛盾を導く方法）であり，それも確かに間違いではないのだが，歴史的に正確に見ると，実際にユークリッドが行なった証明は直接構成法（任意に与えられた有限個の素数から新しい素数を構成する方法）であった．その概要は次のようである．

> 仮に有限個の素数があったとすると，それらを全て掛け合わせて 1 を加えた数は，有限個の素数のどれで割っても 1 余る．よってその数はそれら有限個の素数のどれで割っても割り切れない．したがって，その数は新しい素因数を持つので，最初に考えた有限個の素数以外に，別の素数が存在することになる．

このように，素数が無数に存在することは紀元前にすでに知られていた．その後，長い間，素数論の進展はなかったが，1737 年に天才数学者オイラーにより，画期的な進展が得られた．それは，**ゼータ関数**

*

$$\zeta(s)=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}$$

という強力な道具を発見したことにあった．この級数は s>1 のときに収束するが，s=1 では∞に発散する．すなわち，

$$\zeta(1)=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots=\infty$$

である．この発散無限級数は調和級数と呼ばれ，微積分の演習問題としてよく教科書にも載っている．オイラーは，次のような ζ(s) の新しい表示式を発見した．

$$\zeta(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=\prod_{p:\,素数}\frac{1}{1-\frac{1}{p^s}}.$$

右辺の $\prod$ は積の記号であり，すべての素数 p に渡った積を表す．これを**オイラー積**という．

このオイラー積表示を証明するには，右辺をべき級数展開

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots$$

を用いて

$$\begin{aligned}&\frac{1}{1-\frac{1}{2^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{3^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{5^s}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{7^s}}\cdots\\&=\left(1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{8^s}+\cdots\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{9^s}+\cdots\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{25^s}+\cdots\right)\\&\quad\times\left(1+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{49^s}+\cdots\right)\times\cdots\\&=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}+\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}+\frac{1}{9^s}+\frac{1}{10^s}+\cdots\end{aligned}$$

と展開すればよい．たとえば

$$\frac{1}{6^s}=\frac{1}{2^s}\cdot\frac{1}{3^s},$$

$$\frac{1}{10^s}=\frac{1}{2^s}\cdot\frac{1}{5^s}$$

のように出てくる．

このオイラー積表示は，素数論に進展を与えた．その理由は，先程見た ζ(1)=∞より，素数が無数に存在することが直ちにわかるからである．すなわち，s=1 を代入した際，素数全体に渡る積が∞に発散するということは，その積が無限積であることを意味するからである．有限積であれば，どんな値を代入しても∞になることはあり得ない．これはユークリッドの行なった背理法あるいは直接構成法による証明とは本質的に異なる新しい証明であった．

数学においては，一つに定理に対して別の証明（別証）を得る研究は重要である．証明の方法を変えることにより，それまでに決して見えなかった新しい現象が観察され，数学を進展させることが可能となる．上でみたオイラーの別証は，単にユークリッドと同じ事実を別の方法で示しただけではない．素数の個数に対する本質的に新しい事実を含んでいる．

それは，たとえ無限積であっても収束する場合もあり得ることを考慮すればわかる．無限積が発散するとは，積を構成する無限の大きさがある程度大きいことを意味するのだ．たとえ素数が無限に存在するという事実が同じであっても，その無限が比較的小さな無限であり，素数の出現が非常に稀である状況下においては，無限積は収束し得る．

オイラーは，ユークリッド以来知られていた「素数が無数に存在する」事実を，数千年ぶりに改良したことになる．すなわち，素数の個数としての無限大は，∞の中でもある程度大きな∞である．そしてその大きさとは，オイラー積が発散する程度の大きさである．

現代の数学では，このオイラーの結果を「無限大の位数」という概念を用いて正確に表すことができる．オイラーの時代にはそうした記法がなかったため，オイラーはこの結果を論文中に記していないが，オイラー積の発見は数学史上最大級の発見の一つと数えられている．その後，現代に至るまで，素数の個数の∞の大きさを正確に求める問題は研究され続けているが，その研究にはゼータ関数が使われ，それ以外の道具はいまだに知られていない．素数論，あるいはより一般に整数論とは，ゼータ関数論のことであると言っても過言ではない．オイラーはそんな数学の新分野を切り拓いた人物として，名を残している．

オイラーから 100 年後の 1859 年，リーマンはゼータ関数に新たな進展を与えた．上で紹介したオイラーの ζ(s) は，現在はリーマンのゼータ関数と呼ばれている．その理由は，オイラーの時代にはまだ複素数関数論がなかったため，オイラーは変数 s を実数，特に整数についてのみ考察していた．まだその段階の ζ(s) は関数というよりも級数の個々の値に過ぎず，これを複素変数の関数とみなしたのはリーマンの業績である（ちなみに，ゼータ ζ という文字を用いたのもリーマンである）．

複素関数とみなすことで，何がわかるのだろうか．ここに数学の奥深さ，現代整数論の神秘がある．ゼータ関数 ζ(s) は，s が実数の場合には s>1 で収束し，s=1 で発散するこ

とは先に述べた．s が複素数の場合，複素半平面 Re(s)＞1 で収束し，それ以外では発散することが証明できる．しかし，複素関数には解析接続という概念があり，正則関数（または有理型関数）として，定義域を拡張することができる．リーマンは，ζ(s) にこのような操作が可能であることを証明した．そして，ζ(s)＝0 となる点（このような s を零点という）が，複素平面上に無数に存在することも示した．零点がわかれば，関数を因数分解形に書くことができる．すなわち，零点 ρ に渡る無限積として

$$\zeta(s) = \prod_{\rho}\left(1 - \frac{s}{\rho}\right)$$

といった形になる．これは複素関数論でアダマール積（またはワイヤーストラスの標準形）といわれている形であるが，ここでは簡単のため，収束性に必要な付加的な因子を省略した．

いずれにしても，リーマンにより得られた因数分解形は「零点に渡る積」の形であり，これをオイラー積と比較することにより，

(零点に渡る積)＝(素数に渡る積)

という事実が得られる．この両辺の対数を取れば，

(零点に渡る和)＝(素数に渡る和)

の形の式も得られる．

さて，すでに無数に存在することがわかっている素数が，はたしてどれくらい大きな∞であるかを研究するには，x 以下の素数の個数 π(x) の増大度を，x の関数として求めればよい．π(x) は，x 以下の素数に対して 1，その他の素数に対して 0 を加えた「素数にわたる和」とも解釈できるので，上で述べた方程式により，ゼータ関数の零点に渡る和と関連がつく．

リーマンの時代に行なわれた研究は，x→∞のときの π(x) の挙動を求めることであり，それは，以下の**素数定理**として 1800 年代後半に証明された：

$$\pi(x) \sim \int_2^x \frac{t}{\log t}dt.$$

記号～は，左辺と右辺の比が x→∞で 1 に収束するという意味である．すなわち，～は主要項が等しいことを表している．右辺の積分が意味するところは，t くらいの大きさの数が素数である「確率」は，ほぼ 1/log t だということである．被積分関数 t/log t は，t くらいの大きさの素数の個数の期待値に相当し，それを 2 から x まで積分することで，素数の個数 π(x) を得ている．この右辺の積分式を対数積分と呼び，li(x) と書く．部分積分により，容易に

$$\mathrm{li}(x) \sim \frac{x}{\log x}$$

であることがわかる．

この素数定理は，ゼータ関数 ζ(s) の複素関数としての性質から得られる．実際，ζ(s)≠0 (Re(s)＝1) という事実が，素数定理と同値である．そして，より一般に，ゼータ関数の零点が，π(x) の挙動に逐一影響を与えていることがわかる．s＝ρ という零点があったとすると，それは π(x) に対して li(x^ρ) という項で寄与する．複素数の基本的な性質から，li(x^ρ) の大きさは，li($x^{\mathrm{Re}(\rho)}$) であるから，素数の個数を決定づける重要な量はゼータ関数の零点 ρ の実部 Re(ρ) であることがわかる．

π(x) に対し，その主要項は素数定理によってわかったのだが，より詳しい挙動（誤差項）を知るには，Re(ρ) が必要となるのである．リーマンは，緻密な計算を重ねていくつかの零点に対して Re(ρ) を求め，すべての複素零点に対し Re(ρ)＝1/2 であろうと予想した．これを**リーマン予想**と呼ぶ．

Re(ρ) は最低 1/2 であることが証明されているため，リーマン予想が正しければ素数の個数は最低限度となり，誤差項の大きさが最小となる．すると，どの辺りにどの程度の確度で素数が出現するかが見積もれるようになり，その結果，暗号の鍵となる素数の発見がしやすくなる．

リーマンがリーマン予想を提出したのは 1859 年であり，今年 2009 年はちょうど 150 周年である．現在リーマン予想は数学界最大の未解決問題といわれており，150 周年の今年は，リーマン予想に関する記念研究集会や書籍の出版が相次いでいる．

以上がリーマン予想誕生までの，歴史的経緯と数学的背景である．

3．セルバーグ・ゼータ関数

数学の研究では，未解決問題を考える際に，類似例を構成して解いてみることが行なわれる．自然界の現象や数学的な現象には，不思議なバランスが存在し，一見理論的に関係がないように見える複数の局面において，類似の現象が成立するといった例が多くみられるからである．

リーマンのゼータ関数の類似として，セルバーグは新しいゼータ関数を定義した．それは負定曲率の可微分多様体 M のゼータ関数 $Z_M(s)$ であり，次で定義される．

$$Z_M(s) = \prod_{n=0}^{\infty}\prod_{P}(1 - N(P)^{-n-s}).$$

ここで，P は素数の類似で，M 上の素測池線と呼ばれるものである．P は曲線（図形）であるから，それ自体が数値でなく，そのままでは数式に組み込めない．そこで，その一周の長さ ℓ(P) を用いて，ノルムを N(P)＝$e^{\ell(P)}$と定義し，これを素数の大きさの類似としてゼータ関数に用いたものが上の定義である．なお，このオイラー積は n，P に渡る二重無限積になっているが，これはゼータ関数の解析を行なうための跡公式からの計算結果である．これについては，著書 [7] に詳述した．

セルバーグは，ゼータ関数 Z_M(S) の複素零点が，ほとんどすべての場合に Re(s)＝1/2 を満たすことを発見した．すなわち，セルバーグのゼータ関数の零点は，有限個の例外を除いてリーマン予想の類似を満たすのである．セルバーグの証明は非常に複雑であるが，私は，跡公式からの直接計算とスペクトラル・ゼータ関数の解析接続という新しい手法を用いることにより，Z_M(S) がリーマン予想を満たすからくりを解明した．以下にその研究を紹介する．

多様体 M に対し，ラプラシアンΔという作用素が定義される．Δは関数空間 L^2(M) 上に作用し，M がコンパクトなときはスペクトルは離散となり，M が非コンパクトなときは連続スペクトルが生ずることがわかっている．私の得た定理は，セルバークのゼータ関数が

$$Z_M(s) = \det(\Delta, s)$$

という形に行列式を用いて表されるということである．det は行列式の記号であり，すべてのスペクトルの積である．したがって，一般に離散・連続の両方のスペクトルがある場合には，離散部分 $\det_D$(Δ，s) と連続部分 $\det_C$(Δ，s) の積として，

$$Z_M(s) = \det_D(\Delta, s)\det_C(\Delta, s)$$

と表わされる．ここで，変数sの寄与は，離散部分については

$$\det_D(\Delta, s) = \det_D(\Delta - s(1-s))$$

となる．すなわち，固有値列を λ_n で表せば，

$$\det_D(\Delta, s) = \prod_n (\lambda_n - s(1-s))$$

となる．これがセルバーグ・ゼータ関数の因数分解形の一部（離散部分）であると見ることができ，Z_M(s)＝0 を解くには，各因子の s に関する 2 次方程式を解き，

$$s = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\lambda_n - \frac{1}{4}}i$$

となる．ラプラシアンは自己共役作用素であり，固有値はすべて非負の実数で，無限大に発散することが知られているので，この零点 s は，1/4 より小さな有限個の固有値を除いて，ほとんどすべての場合に実部が 1/2 となる．こうして，セルバーグ・ゼータ関数のリーマン予想は示される．

以上の理論は「セルバーグ・ゼータ関数の行列式表示の研究」として，論文 1) ～ 5) により種々の拡張がなされ，現在に至っている．現在の数学では，ゼータ関数の行列式表示を得ることが，リーマン予想解決に向けた最も有効な手段であろうと考えられているが，この研究はその哲学に寄与するものである．

4．絶対数学：一元体上の幾何学

本節では，リーマン予想への取り組みの最先端の話題として，一元体$\mathbb{F}_1$上の幾何学を紹介する．この分野はまだ始まったばかりであり，未開拓の部分が多い．$\mathbb{F}_1$に関わる諸概念の定義はまだ完全に定まっているとはいえず，まだ定義を模索している段階である．

一元体そのものの発祥は，1957 年のティッツの論文に遡るが，その後，世界の数学界で 30 年あまりの間，この概念は無視されていた．1990 年頃より，東京工業大学の黒川教授により，一元体の概念をリーマン予想の解決に応用できるであろうとの提唱がなされ，1995 年，マニンによる歴史的な論文 9) が出版され，その後，黒川・小山の共同研究として，多数の論文が出版された．一方，フィールズ賞受賞者として名高い幾何学者コンヌは，90 年代中盤からリーマン予想を非可換幾何学を用いて解決することに取り組み，2 編の論文を出版した．このアプローチは，当初は従来の数論とまったく別の手法と考えられたが，最終的には一元体上の幾何学の構成が必要となり，黒川・マニンらの方針と共通の概念が必要となった．こうして，一元体上の幾何学について研究が盛んに行なわれるようになり，現在に至っている．

一元体上の数学を「絶対数学」と呼び，そこで登場する諸概念にも「絶対」の接頭語をつける習慣になっている．一元体とは，これまでに数学で扱われたあらゆる諸概念の根源となっている基本的な代数系のことであり，体の標数に関わらず共有される共通の係数体である．数学の歴史上，0の発見以来の大きな変革であるという人もいる．一元体は，当初は仮想的なものであったが，最近ではその定義も確立され，一元体を用いた諸概念も，徐々に定義されている．

たとえば，一元体上の代数とは，乗法的半群（モノイド）のことであり，それを用いると，下に述べるように，絶対ゼータ関数が定義できる．

最近，私たちが得た定理として，絶対ゼータ関数の実例に関する諸結果がある．

$\mathbb{F}_1$代数を乗法モノイド（単位元 1 を持ち，結合法則を満たす代数系）であって 0 を持つものと定義する．この 0 とは，どんな元との積も 0 となる元をいう．具体的には自然数 m に対して$\mathbb{F}_{1^m}$を，1 の m 乗根の全体からなる集合に 0 を添加した集合と置く．これは基本的な$\mathbb{F}_1$代数である．

絶対ヴェイユ・ゼータ関数は$\mathbb{F}_1$代数 A に対して

$$\zeta_A(s) = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|\mathrm{Hom}(A, \mathbb{F}_{1^m})|}{m} e^{-ms}\right)$$

と定められる．この定義は，リーマン・ゼータ関数の類似の一つである合同ゼータ関数の定義と同じ形であり，自然な定義である．次の定理 (1)～(5) が成り立つ（証明は文献 6)，8) を参照されたい）．

(1) $\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s) = \prod_{n \mid N} (1 - e^{-ns})^{-\frac{\varphi(n)}{n}}$. ただし，$\varphi(n)$ はオイラー関数であり，n と公約数を持たないような n 以下の自然数の個数を表す．

(2) $\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s)$ は s⟷−s の関数等式を持つ．

(3) $\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s)$ の特異点（“零点・極”）はすべて Re(s) = 0上に乗っている。

(4) 行列式表示

$$\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s) = \det(1 - \Phi_N e^{-s})^{-\frac{1}{N}}$$

を満たす．ここで，

$$\begin{array}{cccc} \Phi_N : & \mu_{N^2} & \longrightarrow & \mu_{N^2} \\ & \alpha & \longmapsto & \alpha^{N+1} \end{array}$$

は自己同型（“フロベニウス作用素” に当たる）である．

(5) $\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s)$ (N=1, 2, 3…) は，零点·極の加法性を満たす．すなわち $\zeta_{\mathbb{F}_1{}^N}(s)$ の零点・極の和を零点・極に持つようなゼータ関数が構成でき，行列 Φ_N のクロネッカー積による行列式表示を持つ．

定理の最終項目 (5) に述べた零点・極の加法性は，ゼータ関数のリーマン予想を証明するために必要な性質である．

このように，$\mathbb{F}_1$代数のゼータ関数は，リーマン予想解決に向けた望ましい性質を持つ．今後は$\mathbb{F}_1$上のゼータ関数の実例計算をより多く行ない，こうした性質を持つゼータ関数の族を広げていくことが，リーマン予想に近づくことにつながると思われる．

参考文献

1) S.Koyama: The Selberg zeta functions and the determinant of the Laplacians, Proceeding of the Japan Academy 65A (1989) 280-283.

2) S.Koyama: Determinant expression of Selberg zeta functions (I), Transactions of the American Mathematical Society 324 (1991) 149-168.

3) S.Koyama: Determinant expression of Selberg zeta functions (Ⅲ), Proceedings of the American Mathematical Society 113 (1991) 303-312.

4) S.Koyama: Selberg zeta functions and Ruelle operators for function fields, Proceedings of the Japan Academy 67A (1991) 255-259.

5) S.Koyama:Determinant expression of Selberg zeta functions (II), Transactions of the American Mathematical Society 329 (1992) 755-772.

6) A.Deitmar, S.Koyama and N.Kurokawa: Absolute zeta functions. Proceedings of the Japan Academy 84A (2008) 138-142.

7) 黒川重信・小山信也「リーマン予想のこれまでとこれから」(日本評論社) 2009 年 12 月.

8) S.Kim, S.Koyama and N.Kurokawa: The Riemann hypothesis and functional equations for zeta functions over $\mathbb{F}_1$. Proceedings of the Japan Academy 85 (2009) 75-80.

9) Y.Manin: Lectures on zeta functions and motives (according to Deninger and Kurokawa). Columbia University Number Theory Seminar (New York, 1992).Astérisque No.228, 4, 121-163 (1995).