東洋大学「経済論集」　33 巻 1 号　2007 年 12 月

多期間モデルにおけるナッシュ遂行の分析

鮫　島　裕　輔

目　　次

1．はじめに

本稿は Kalai and Ledyard（1998）の多期間モデルにおけるナッシュ遂行を論ずる。本稿で扱う多期間モデルでは，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるためには，マスキン単調性を満たしさえすればよいことを示す。標準的な単期間モデルでは，マスキン単調性はナッシュ遂行の必要条件ではあるが，十分条件ではない。しかし本稿で示すように，期間が無限にあって，社会に属する人々が 3 人以上おり，各人の持つ選好が強選好である場合には，マスキン単調性が十分条件にもなる。

ナッシュ遂行理論は，社会的に望ましい選択を社会に属する人々が参加するゲームのナッシュ均衡の結果として実現しようとする理論である。社会的な望ましさの基準には，例えばパレート効率性や公平性などさまざまな基準がありうる。ここではこれらの具体的な基準は議論せず，人々の選好プロファイルを与えると社会的に望ましい選択肢の集合が定まるような多価関数（これは社会選択対応と呼ばれる）があるとしよう。各人は選択肢に対してさまざまな選好を持つ可能性があり，異なる選好プロファイルに対しては社会的に望ましい選択肢の集合も違ってくる。他方，人々の選好はゲームのなかで人々が選ぶ行動に影響するので，異なる選好プロファイルに対してはゲームのナッシュ均衡の集合も違ってくる。ここで，もしゲームのルール（これはゲームフォームと呼ばれる）を適切に設計すると，任意の選好プロファイルに対して，ゲームのナッ

シュ均衡として実現できる選択肢の集合と社会的に望ましい選択肢の集合を一致させることができる場合がある。このとき，この社会選択対応はナッシュ遂行可能であるという。社会選択対応がナッシュ遂行可能であることの利点は，計画当局が人々の選好に関する詳細な情報を知らなくとも，人々にゲームをプレイしてもらいさえすれば，ナッシュ均衡の結果として社会的に望ましい選択肢を実現できることである。

社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための必要条件や十分条件を研究したものには，Maskin (1999)，Moore and Repullo (1990)，Danilov (1992) などがある。Maskin は，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための必要条件は，その社会選択対応がマスキン単調性という性質を満たすことであることを示した。Maskin は十分条件にも言及し，社会に属する人々が 3 人以上いる場合，社会選択対応がマスキン単調性に加えて no veto power という性質を満たしさえすれば，その社会選択対応がナッシュ遂行可能であることを示した。Maskin が示した必要条件と十分条件の間にはギャップがあったため，それを埋めるべく必要十分条件を追究したのが Moore and Repullo や Danilov の研究である。彼らが示した必要十分条件は，当然マスキン単調性よりも強い条件となっている。

これらの研究が示すように，ナッシュ遂行理論の標準的なモデルでは，社会選択対応がマスキン単調性を満たすことはナッシュ遂行可能であるための必要条件ではあるが，十分条件ではない。ここでいう標準的なモデルとは，人々がゲームをプレイしたあとにゲームのルールによって社会選択がただ一つ選ばれるようなモデルである。標準的なモデルは一回のゲームによって，言わば単期間の社会選択を決めようとする。本稿はこの標準的な単期間モデルから離れて，一回のゲームによって複数あるなかの各期間の社会選択を決めるようなモデルを考察する。そして，期間が無限にあって，社会に属する人々が 3 人以上おり，各人の持つ選好が強選好である場合には，マスキン単調性がナッシュ遂行可能であるための必要十分条件になることを示す。単期間モデルに比べて本稿の多期間モデルでは，より弱い条件が必要十分となる。

遂行理論の諸研究のなかで，多期間を通じて社会選択を実現するようなモデルを考察したものの代表には Kalai and Ledyard (1998) がある。本稿は彼らの多期間モデルの枠組みを用いる。

Kalai and Ledyard は，十分に長い冷却期間を経た後では，任意の社会選択関数を支配戦略均衡で遂行できるようなゲームフォームを示した。このゲームフォームの長所は，ナッシュ均衡よりも納得性が高いといわれる支配戦略均衡を用いるうえに，どんな社会選択関数も遂行できることである。短所は，望ましい選択肢を実現するまでに相当期間を要することであり，このため，人々の通時的な効用水準は望ましい選択肢を第 1 期から即座に実現する場合とは大きく乖離してしまう。

Kalai and Ledyard とは異なり，本稿では第 1 期から将来に渡って遂行する選択肢の無限列につ

いて，社会的に望ましいものを実現することを追求する。本稿で示すゲームフォームは，ナッシュ均衡を用いる点と，遂行可能な社会選択対応がマスキン単調性を満たすものに限られる点で，Kalai and Ledyard よりも後退している。しかし，その代わりに本稿では，Kalai and Ledyard が社会的な望ましさの考慮の対象外としている第1期から相当期間に実現する選択肢の列も含めて，社会的な望ましさを考慮する。すなわち，本稿のゲームフォームは人々の通時的な効用水準も含めて社会的に望ましい状態を実現する。この点が本稿のゲームフォームの利点である。

なお，ナッシュ遂行理論の標準的なモデルから離れて遂行可能な社会選択対応の範囲を広げようという試みには，Abreu and Sen（1991）による virtual implementation の研究などもある。彼らは選択肢を確率的に選べるような状況を考察し，望ましい選択肢に確率的に限りなく近い状態を実現することを考えた。また Bochet and Sakai（2005）は，選択肢を確率的に選べるような状況で社会に属する人々が3人以上いる場合，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための必要十分条件はマスキン単調性を満たすことであることを示した。本稿と関連する先行研究として挙げておく。

本稿の構成は以下の通りである。第2節では，多期間モデルを説明し，この枠組みにおける社会選択対応，ゲームフォーム，およびナッシュ遂行可能性を定義する。第3節では，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための必要条件と十分条件は，マスキン単調性を満たすことであることを示す。第4節では，結論を述べる。

2．モデル

以下の多期間モデルは概ね Kalai and Ledyard（1998）の枠組みに準じている。

社会的な選択肢の集合を A とし，その要素を選択肢 a などと呼ぶ。A は少なくとも2つ以上の選択肢を含む。

人々の集合を $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ とし，その要素をプレイヤー i などと呼ぶ。N は有限集合で少なくとも3人以上を含む。

各人は社会的な選択肢に対してさまざまな選好を持つ可能性があり，それに対応した選好タイプに分けられる。ただしどの選好タイプにおいても選好は完備性，推移性，連続性を満たすものとする。プレイヤー i が分類されうる選好タイプの集合を Θ_i とし，その要素を選好タイプ θ_i などと呼ぶ。

プレイヤー i の効用関数を $u_i : \Theta_i \times A \to \mathbb{R}$ で表す。ただし $\mathbb{R}$ は実数の集合を表す。例えば選好タイプ θ_i を持つプレイヤー i の選択肢 a に対する効用は $u_i(\theta_i, a)$ となる。どのプレイヤーのどの選好タイプの効用関数も有界であるとする。本稿では各プレイヤーの選好は強選好（strict preference）であると仮定する。

仮定（強選好性）． 任意の $i \in N$，任意の $\theta_i \in \Theta_i$，および任意の $a, b \in A$ について，
もし $a \neq b$ ならば，$u_i(\theta_i, a) \neq u_i(\theta_i, b)$ が成り立つ。

ここまでは単期間における選択肢と人々の効用に関する記述である。次に多期間モデルについて記す。期間は第１期から始まって第２期，第３期，...と無限に続く。

社会的な選択肢は各期とも A から選ばれるものとし，第 t 期のために選んだ選択肢は a^t などと表す。人々は，選択肢の無限列 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ を直積集合 $A^\infty = \Pi_{t=1}^{\infty} A$ から選ぶことになる。この集合の要素は無限列 $\mathbf{a}$ や無限列 $\mathbf{b}$ などと呼ぶ。

プレイヤー i が将来の効用を現在価値に直すための割引因子を $\delta_i \in (0, 1)$ とする。割引因子は厳密に０より大きく１より小さい。この δ_i をプレイヤー i の割引因子タイプと呼ぶ。

プレイヤー i の選好タイプ θ_i と割引因子タイプ δ_i を並べたもの $\omega_i = (\theta_i, \delta_i)$ を，単にプレイヤー i のタイプと呼ぶ。プレイヤー i のタイプの集合は $\Omega_i = \Theta_i \times (0, 1)$ と表す。プレイヤー達のタイプの集合の直積を $\Omega = \Pi_{i=1}^{n} \Omega_i$ とし，その要素をタイププロファイル $\omega = (\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n)$ などと呼ぶ。

タイプ $\omega_i = (\theta_i, \delta_i)$ を持つプレイヤー i の無限列 $\mathbf{a} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ に対する効用は，記号の乱用を許すことにして，

$$u_i(\omega_i, \mathbf{a}) = \sum_{t=1}^{\infty} \delta_i^{t-1} u_i(\theta_i, a^t)$$

と記述する。

社会選択対応 $\varphi : \Omega \rightrightarrows A^\infty \setminus \{\emptyset\}$ とは人々のタイププロファイル ω を与えると社会的に望ましい無限列の集合 $\varphi(\omega)$ が定まるような多価関数である。社会的な望ましさの規準には，例えばパレート効率性や公平性などさまざまな基準がありうるが，本稿では具体的な基準は議論しない。

ゲームフォームとは，各プレイヤーの戦略空間 $S_1, S_2, \ldots, S_n$ と帰結関数 $g : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to A^\infty$ の組み合わせである。これは言わば社会に属する人々が参加するゲームのルールである。ゲームフォームでは，各プレイヤー i があらかじめ定められた戦略空間 S_i から戦略 s_i を選ぶ。すると戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ に応じて選択肢の無限列 $g(s) = (g^1(s), g^2(s), \ldots, g^t(s), \ldots) \in A^\infty$ が一つ決まり，ゲームのルールに従ってこれを社会的な決定として将来にかけて遂行することになる。ここで無限列 $g(s)$ の t 番目にある選択肢を $g^t(s)$ と表記することに注意する。なお，戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ のうちプレイヤー i の戦略を s_i から s_i' へと置き換えて得られる新しい戦略プロファイルは $(s_i', s_{-i}) = (s_1, s_2, \ldots, s_i' \ldots, s_n)$ などと記述する。

本稿ではナッシュ遂行可能性を次のように定義する。

定義（ナッシュ遂行可能性）. ある社会選択対応 φ について，次の２つの条件を満たすゲームフォーム $(S_1, S_2, \ldots, S_n, g)$ が存在するとき，社会選択対応 φ はナッシュ遂行可能であるという。

（条件１）任意の $\omega \in \Omega$ および任意の $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ について，次を満たす $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ が存在する。

$g(s) = \mathbf{a}$ であり，かつ

$u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ の任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つ。

（条件２）任意の $\omega \in \Omega$ および任意の戦略プロファイル $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ について，次が成り立つ。

もし $u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$ が

任意の $i \in N$ および任意の $s_i' \in S_i$ について成り立つならば，

$g(s) \in \varphi(\omega)$ である。

（条件１）の意味は，どんなタイププロファイルが与えられた場合でも，任意の社会的に望ましい無限列を実現する純粋戦略ナッシュ均衡が存在するということである。（条件２）の意味は，どんなタイププロファイルが与えられた場合でも，純粋戦略ナッシュ均衡が存在するとすれば，その結果として何らかの社会的に望ましい無限列が実現するということである。両方の条件を合わせると，望ましい無限列の集合とゲームのナッシュ均衡として実現できる無限列の集合が一致することになる。

社会選択対応がナッシュ遂行可能であることの利点は，計画当局が人々のタイプに関する詳細な情報を知らなくとも，人々にゲームをプレイしてもらいさえすれば，ナッシュ均衡の結果として社会的に望ましい無限列を実現できることである。

なお，上記の遂行可能性の定義は Kalai and Ledyard のものと以下の点が異なる。第一に，Kalai and Ledyard は支配戦略均衡を用いるのに対し，本稿はナッシュ均衡を用いる。第二に，Kalai and Ledyard の遂行可能性は「ゲームの均衡として実現できる無限列は，ある期以降の部分について，望ましい無限列と一致すること」と定義されるのに対し，本稿の遂行可能性は「ゲームの均衡として実現できる無限列は，その全体が望ましい無限列そのものであること」を意味する。

3．分　　析

本稿が証明するのは，多期間モデルにおいて社会選択対応がナッシュ遂行可能であるためには，マスキン単調性を満たしさえすればよいということである。

定義（マスキン単調性）． ある社会選択対応 φ に関して，次の条件を満たす任意の ω，$\omega' \in \Omega$ および $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ を考える。

（条件）任意の $i \in N$ および任意の $\mathbf{b} \in A^{\infty}$ について，

もし $u_i(\omega_i, \mathbf{a}) \geq u_i(\omega_i, \mathbf{b})$ ならば，$u_i(\omega'_i, \mathbf{a}) \geq u_i(\omega'_i, \mathbf{b})$ が成り立つ。

このとき，もし $\mathbf{a} \in \varphi(\omega')$ が成り立つならば，社会選択対応 φ はマスキン単調性を満たすという。

社会選択対応 φ がマスキン単調性を満たすとは，次のようなことを意味する。まず，タイププロファイル ω のもとで社会的に望ましい無限列 $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ を取り出す。そして，プレイヤー i の無限列 $\mathbf{a}$ に対する好ましさをタイプ ω_i のときと同等かそれ以上に引き上げることで得られる新しいタイプ ω'_i を考える。すべてのプレイヤーに同様の操作をして得られる新しいタイププロファイル ω' のもとでは，タイププロファイル ω のときと同様に，無限列 $\mathbf{a}$ は社会的に望ましくなければならない。すなわち，最初の状態で社会的に望ましかった無限列を，以前にも増してより好ましいと全員が考えるようになった場合，その無限列は引き続き社会的に望ましくなければならない，ということをマスキン単調性は要求する。

Maskin（1999）は単期間モデルにおいて，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための必要条件はマスキン単調性を満たすことであることを示した。その証明方法は多期間モデルにも応用できる。

命題 1（Maskin, 1999）． 社会選択対応 φ がナッシュ遂行可能ならば，マスキン単調性を満たす。

証明．φ がナッシュ遂行可能ならば，あるゲームフォーム $(S_1, S_2, \ldots, S_n, g)$ が存在し，これはナッシュ遂行可能性の定義の（条件 1）と（条件 2）を満たす。

いま任意の $\omega \in \Omega$ を取り出し，任意の $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ を考える。（条件 1）より，次を満たす $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ が存在する。

$g(s) = \mathbf{a}$ であり，かつ

$u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s'_i, s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ の任意の $s'_i \in S_i$ について成り立つ。

ここでマスキン単調性の定義の（条件）を満たす任意の $\omega' \in \Omega$ を考える。

任意の $i \in N$ および $\mathbf{b} \in A^{\infty}$ について，

もし $u_i(\omega_i, \mathbf{a}) \geq u_i(\omega_i, \mathbf{b})$ ならば，$u_i(\omega'_i, \mathbf{a}) \geq u_i(\omega'_i, \mathbf{b})$ が成り立つ。

ここで $g(s) = \mathbf{a}$ に注意すると，次が成り立つといえる。

$u_i(\omega'_i, g(s)) \geq u_i(\omega'_i, g(s'_i, s_{-i}))$ が任意の $i \in N$ の任意の $s'_i \in S_i$ について成り立つ。

すると（条件 2）より，$g(s) \in \varphi(\omega')$ である。従って φ はマスキン単調性を満たす。（証明終）

単期間モデルについて，Maskin（1999）は社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための十分条件にも言及し，社会に属する人々が3人以上いる場合，社会選択対応がマスキン単調性に加えてno veto powerという性質を満たせば，その社会選択対応がナッシュ遂行可能であることを示した。他方，本稿で扱う多期間モデルでは，社会に属する人々が3人以上おり，人々が強選好を持つ場合，社会選択対応がナッシュ遂行可能であるためには，マスキン単調性を満たしさえすればよい[1)]。次の命題が本稿の結果である。

命題2． プレイヤーが3人以上おり，各プレイヤーが強選好を持つとき，社会選択対応 φ がマスキン単調性を満たすならば，ナッシュ遂行可能である。

証明．まず，ゲームフォーム $(S_1, S_2, \ldots, S_n, g)$ を以下のように定義する。

- 各プレイヤー i の戦略空間を $S_i = \Omega \times A^{\infty} \times \mathbb{N}$ とする。ただし $\mathbb{N}$ は自然数の集合である。例えば，プレイヤー i の戦略 $s_i = (\omega^i, \mathbf{a}^i, k^i)$ に含まれる項目は，タイププロファイル ω^i，選択肢の無限列 $\mathbf{a}^i$，および自然数 k^i である。ここで右上の添字 i は，プレイヤー i が戦略として選んだことを意味する。タイププロファイル ω^i には，全員分のタイプが含まれることに注意する。戦略として選ばれるタイププロファイルは，必ずしも真のタイププロファイルであるとは限らない。
- 帰結関数 $g : S_1 \times S_2 \times \cdots \times S_n \to A^{\infty}$ を次のように定義する。

Case 1. 何らかの $(\omega, \mathbf{a}, k)$ について $s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\omega, \mathbf{a}, k)$ であり，かつ $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ である場合，$g(s) = \mathbf{a}$ とする。

Case 2. プレイヤー i 以外の任意のプレイヤー $j \neq i$ が何らかの共通の戦略 $s_j = (\omega, \mathbf{a}, k)$ をとり，かつ $\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$ である一方で，プレイヤー i だけが異なる戦略 $s_i = (\omega^i, \mathbf{b}^i, k^i) \neq (\omega, \mathbf{a}, k)$ をとる場合，

- もし $u_i(\omega_i, \mathbf{a}) \geq u_i(\omega_i, \mathbf{b}^i)$ であり，かつ $\mathbf{b}^i = (b^1, b^2, \ldots, b^t, \ldots)$ について $b^t \neq b^{t+1}$ が何らかの t について成り立つならば，$g(s) = \mathbf{b}^i$ とする。ただし，ここで ω_i はプレイヤー i 以外のプレイヤーが戦略の一部として選んだタイププロファイル ω に含まれるものである。
- 直前に記した条件が成り立たない場合は，$g(s) = \mathbf{a}$ とする。

Case 3. Case 1 も Case 2 も当てはまらない場合，

$i^* = \max\{i \mid k^i = \max_j k^j\}$ で定義されるプレイヤー i^* が選んだ無限列 $\mathbf{a}^{i^*} = (a^1, a^2, \ldots, a^t, \ldots)$ と自然数 k^{i^*}，および a^1 と異なる任意の $b \in A \setminus \{a^1\}$ を用いて，$g(s)$ を次のように定義

1）標準的な単期間モデルでは，プレイヤーが3人以上いて強選好を持つ場合でも，マスキン単調性は社会選択対応がナッシュ遂行可能であるための十分条件にはならない。

する。

- $t \leq k^{i^*}$ について，$g^t(s) = a^t$ とする。
- $t > k^{i^*}$ について，$g^t(s) = b$ とする。

Case 1は全員が同一の戦略を選んでいて，そこに含まれるタイププロファイルωのもとで無限列$\mathbf{a}$が社会的に望ましいケースである。このときの社会的な決定は$\mathbf{a}$とする。

Case 2はCase 1の状態から一人プレイヤーiだけが他の全員とは異なる戦略に変えたケースである。プレイヤーが3人以上いるのでCase 2の定義に曖昧さは生じない。そのプレイヤーiが選んだ無限列$\mathbf{b}^i$が，少なくとも2種類の選択肢を含むと同時に，他人により報告されたプレイヤーiのタイプω_iのもとで無限列$\mathbf{a}$以下の効用をもたらす場合にのみ，社会的な決定は$\mathbf{b}^i$とする。それ以外の場合は$\mathbf{a}$とする。

Case 3は上の両ケースに当てはまらない場合で，このときは，最も大きい自然数を戦略に組み込んだプレイヤーのうち最大のインデックスを持つ者i^*が選んだ無限列$\mathbf{a}^{i^*}$の前半k^{i^*}個分の選択肢の列と後半部分のために恣意的に定めた選択肢の列の組み合わせを，社会的な決定とする。

次に，上に定義したゲームフォームがナッシュ遂行可能性の（条件1）と（条件2）を満たすことを示す。まず，補題1で（条件1）を議論する。

補題1． 任意の$\omega \in \Omega$および任意の$\mathbf{a} \in \varphi(\omega)$について，もし各プレイヤー$i$が$s_i = (\omega, \mathbf{a}, 1)$を選んだならば，$g(s) = \mathbf{a}$であり，かつ$u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$が任意の$i \in N$の任意の$s_i' \in S_i$について成り立つ。

補題1にあるように全員が同一の戦略を選んだ場合，Case 1が適用されるので$g(s) = \mathbf{a}$となる。ここで，もしあるプレイヤーiが逸脱して異なる戦略$s_i' = (\omega^i, \mathbf{b}^i, k^i) \neq (\omega, \mathbf{a}, 1)$をとる場合，Case 2が適用される。このとき$g(s_i', s_{-i}) = \mathbf{a}$または$\mathbf{b}^i$であるが，いずれも$u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s'_i, s_{-i}))$を満たす。

（補題1の証明終）

次に，補題2から補題4までを通じてゲームフォームが（条件2）を満たすことを示す。

補題2． 任意の$\omega \in \Omega$について，もし戦略プロファイルsが均衡であるならば（すなわち$u_i(\omega_i, g(s)) \geq u_i(\omega_i, g(s'_i, s_{-i}))$が任意の$i \in N$および任意の$s_i' \in S_i$について成り立つならば），Case 3が適用されているのではない。

任意のタイププロファイルωを選んで固定し，Case 3が適用されるような任意の戦略プロファイルをsとする。このとき無限列$g(s)$は少なくとも2種類の選択肢を含むことに注意する。

まず，タイプ$\omega_i = (\theta_i,\ \delta_i)$のもとで選好が飽和するプレイヤー$i$がいる場合を考える。すなわち$u_i(\theta_i, a) \geq u_i(\theta_i, b)$が任意の$b \in A$について成り立つような選択肢$a$を持つプレイヤー$i$がいるとする。このとき，選択肢$a$だけを繰り返す無限列$\mathbf{a} = (a, a, a, ...)$について，選好が強選好であるとの仮定と$g(s)$が少なくとも2種類の選択肢を含むことから，$u_i(\omega_i, \mathbf{a}) > u_i(\omega_i, g(s))$が成り立つ。このプレイヤー$i$が，他の誰よりも大きい自然数$k^i$を選んで，戦略を$s_i$から$s_i' = (\omega, \mathbf{a}, k^i)$に変えたとするとCase 3が適用される。プレイヤーiは自然数k^iを十分に大きくすれば，効用$u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$をいくらでも$u_i(\omega_i, \mathbf{a})$に近づけることができるので，そのような$s_i'$について$u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i})) > u_i(\omega_i, g(s))$が成り立つ。

次に，選好が飽和するプレイヤーがいない場合を考える。この場合，任意のプレイヤーiについて，タイプω_iにとって$g(s)$よりも好ましい無限列と十分に大きい自然数を組み込んだs_i'へと戦略を変えることによりCase 3が適用され，$u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i})) > u_i(\omega_i, g(s))$が成り立つ。

（補題2の証明終）

補題3． 任意の$\omega \in \Omega$について，もし戦略プロファイルsが均衡であって，かつCase 1が適用されているならば，$g(s) \in \varphi(\omega)$である。

戦略プロファイルsにCase 1が適用されているので，$s_1 = s_2 = \cdots = s_n = (\hat{\omega},\ \hat{\mathbf{a}},\ \hat{k})$かつ$\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\hat{\omega})$であるとしてよい。このとき$g(s) = \hat{\mathbf{a}}$となっている。また，戦略プロファイル$s$はタイププロファイル$\omega$のもとで均衡なので$u_i(\omega_i,\ \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$が任意の$i \in N$および任意の$s_i' \in S_i$について成り立つ。ここで$\omega$はプレイヤー達の真のタイププロファイルで，$\hat{\omega}$は戦略の一部として報告されたタイププロファイルであると理解できる。もちろん両者は一致するとは限らない。

以下では「任意の$i \in N$および任意の$\mathbf{b} \in A^\infty$について，もし$u_i(\hat{\omega}_i,\ \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b})$ならば，$u_i(\omega_i,\ \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\omega_i, \mathbf{b})$が成り立つ」ことを示す。これが示されれば，$\varphi$がマスキン単調であることから$\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\omega)$となるので補題3を証明したことになる。証明には背理法を用い，ある$i \in N$および$\mathbf{b} \in A^\infty$について，$u_i(\hat{\omega}_i,\ \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b})$かつ$u_i(\omega_i,\ \hat{\mathbf{a}}) < u_i(\omega_i, \mathbf{b})$であるとして矛盾を導く。

まず，無限列$\mathbf{b}$が$\mathbf{b} = (b, b, b, \ldots)$のように1種類の選択肢だけを含み，かつ$u_i(\hat{\omega}_i,\ \hat{\mathbf{a}}) > u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b})$である場合を考える。ここで無限列$\mathbf{b}$に含まれる選択肢のうち，将来の一期間のための選択肢をbとは異なる任意の選択肢b'に置き換えることで得られる無限列$\mathbf{b}' = (b, \ldots, b, b', b, \ldots)$を考える。ただし$b'$を十分に遠い将来のために配置して，$u_i(\hat{\omega}_i,\ \hat{\mathbf{a}}) > u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b}')$かつ$u_i(\omega_i,\ \hat{\mathbf{a}}) < u_i(\omega_i, \mathbf{b}')$が成り立つようにする。もしプレイヤー$i$が戦略プロファイル$s$から逸脱して戦略を$s_i' = (\hat{\omega}, \mathbf{b}',\ \hat{k}) \neq (\hat{\omega},\ \hat{\mathbf{a}},\ \hat{k})$に変えたならば，Case 2が適用されて$g(s_i', s_{-i}) = \mathbf{b}'$となる。すると$u_i(\omega_i, g(s)) <$

$u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$ となる。これは戦略プロファイル s がタイププロファイル ω のもとで均衡であることに矛盾する。

次に，無限列 $\mathbf{b}$ が $\mathbf{b} = (b, b, b, \ldots)$ のように１種類の選択肢だけを含み，かつ報告されたタイプ $\hat{\omega}_i = (\hat{\theta}_i, \hat{\delta}_i)$ のもとで $u_i(\hat{\theta}_i, b) > u_i(\hat{\theta}_i, b')$ となるような選択肢 b' が存在する場合を考える。ここで直前の段落と同様に，無限列 $\mathbf{b}$ に含まれる選択肢のうち，十分に遠い将来のための選択肢を b' に置き換えて得られる無限列 $\mathbf{b}'$ を考えると，先ほどと同様の矛盾が得られる。

次に，無限列 $\mathbf{b}$ が $\mathbf{b} = (b, b, b, \ldots)$ のように１種類の選択肢だけを含むが，上述の２つの場合に当てはまらない場合を考える。すなわち $u_i(\hat{\omega}_i, \hat{\mathbf{a}}) = u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b})$ であり，かつ $u_i(\hat{\theta}_i, b) \leq u_i(\hat{\theta}_i, b')$ が任意の $b' \in A$ について成り立つ場合を考える。すると選好が強選好であるとの仮定より，$\hat{\mathbf{a}} = \mathbf{b}$ となる。これは $u_i(\omega_i, \hat{\mathbf{a}}) < u_i(\omega_i, \mathbf{b})$ に矛盾する。

最後に，上述のすべての場合に当てはまらない場合，すなわち無限列 $\mathbf{b}$ が少なくとも２種類の選択肢を含む場合を考える。この場合，プレイヤー i が戦略プロファイル s から逸脱して戦略を $s_i' = (\hat{\omega}, \mathbf{b}, \hat{k}) \neq (\hat{\omega}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{k})$ に変えたならば，Case 2 が適用されて $g(s_i', s_{-i}) = \mathbf{b}$ となる。すると $u_i(\omega_i, g(s)) < u_i(\omega_i, g(s_i', s_{-i}))$ となり，戦略プロファイル s がタイププロファイル ω のもとで均衡であることに矛盾する。（補題３の証明終）

補題４． 任意の $\omega \in \Omega$ について，もし戦略プロファイル s が均衡であって，かつ Case 2 が適用されているならば，$g(s) \in \varphi(\omega)$ である。

戦略プロファイル s に Case 2 が適用されているので，プレイヤー i 以外の任意のプレイヤー j が何らかの共通の戦略 $s_j = (\hat{\omega}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{k})$ をとり，かつ $\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\hat{\omega})$ が成り立ち，プレイヤー i だけは異なる戦略 $s_i = (\hat{\omega}^i, \hat{\mathbf{b}}^i, \hat{k}^i) \neq (\hat{\omega}, \hat{\mathbf{a}}, \hat{k})$ をとっているとしてよい。戦略プロファイル s から単独で逸脱して異なる戦略に変えることにより，プレイヤー i は Case 1 と Case 2，それ以外のプレイヤーは Case 3 の適用を促すことができる。

まず，$g(s) = \hat{\mathbf{b}}^i \neq \hat{\mathbf{a}}$ である場合を考える。このとき Case 2 の定義より無限列 $g(s)$ は少なくとも２種類の選択肢を含む。すると補題２の証明の議論と同様に，プレイヤー i 以外の任意のプレイヤー j は，自分の真のタイプ ω_j にとって $g(s)$ よりも好ましい無限列と十分に大きい自然数を組み込んだ s_j' へと戦略を変えることにより，Case 3 の適用を促し，$u_j(\omega_j, g(s)) < u_j(\omega_j, g(s_j', s_{-j}))$ とすることができる。つまりこの場合，戦略プロファイル s は均衡になりえない。

次に，$g(s) = \hat{\mathbf{a}}$ である場合を考える。戦略プロファイル s が均衡であることと，プレイヤー i が逸脱によってさまざまな戦略をとることにより Case 1 と Case 2 の適用を自由に促せることから，補題３の証明と同様の議論を展開することでき，次の条件を得る。

任意の$\mathbf{b} \in A^{\infty}$について，もし$u_i(\hat{\omega}_i, \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\hat{\omega}_i, \mathbf{b})$ならば，$u_i(\omega_i, \hat{\mathbf{a}}) \geq u_i(\omega_i, \mathbf{b})$が成り立つ。

また，プレイヤーi以外の任意のプレイヤーjが任意の無限列と十分に大きい自然数を組み込んだ戦略をもってCase 3の適用を促せるにも拘わらず，無限列$g(s) = \hat{\mathbf{a}}$をもたらす戦略プロファイルが均衡になっていることから，次の条件を得る。

任意の$j \in N \setminus \{i\}$および任意の$\mathbf{b} \in A^{\infty}$について，$u_j(\omega_j, \hat{\mathbf{a}}) \geq u_j(\omega_j, \mathbf{b})$が成り立つ。

これら2つの条件と，$\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\hat{\omega})$であること，そして$\varphi$がマスキン単調性を満たすことから$\hat{\mathbf{a}} \in \varphi(\omega)$が成り立つ。　　（補題4および命題2の証明終）

4．結　　論

本稿は，ナッシュ遂行理論で標準的な単期間モデルから離れ，Kalai and Ledyard（1998）による多期間モデルの枠組みでナッシュ遂行を分析した。そして，期間が無限にあって，社会に属する人々が3人以上おり，各人の持つ選好が強選好である場合には，社会選択対応がマスキン単調性を満たしさえすればナッシュ遂行可能であることを示した。標準的な単期間モデルでは，人々が3人以上いて強選好を持つ場合であっても，マスキン単調性はナッシュ遂行可能性のための十分条件にならない。従って，多期間モデルでは単期間モデルよりも弱い条件でナッシュ遂行が可能となることがわかった。

本稿の結果を改善するには，以下の2つの方向が考えられる。1つは，社会に属する人々が2人である場合も検討するという方向である。もう1つは，各人が強選好を持つという仮定を緩めるという方向である。

参考文献

[1] Abreu, D., and Sen, A.（1991）. “Virtual Implementation in Nash Equilibrium,” *Econometrica* 59, 997-1021.

[2] Bochet, O., and Sakai, T.（2005）. “Nash Implementation in Stochastic Social Choice,” mimeo. Available at http://www.geocities.jp/toyotaka_sakai/（accessed on 2007/9/3）.

[3] Danilov, V.（1992）. “Implementation via Nash Equilibria,” *Econometrica* 60, 43-56.

[4] Kalai, E., and Ledyard, J. O.（1998）. “Repeated Implementation,” *Journal of Economic Theory* 83, 308-317.

[5] Maskin, E. (1999). "Nash Equilibrium and Welfare Optimality," *Review of Economic Studies* 66, 23-38.

[6] Moore, J., and Repullo, R. (1990). "Nash Implementation: A Full Characterization," *Econometrica* 58, 1083-1099.