自己無撞着な線形ポテンシャル

手塚洋一*

Selfconsistent Linear Potential

Hirokazu TEZUKA*

Abstract

Quarks are considered to be confined in hadrons, and have never been observed as a single particle. Several ideas are proposed to explain the confinement mechanism. One of them is an assumption that the quarks are confined in an infinitely strong potential. Many nonrelativistic calculations for hadron states suggest that the linear potential is favorable to confine quarks. It is also shown the confinement potential must be scalar. We know analytical solutions of the Dirac equation with the relativistic scalar linear potential. But I do not know how the potential is made from.

Using the analytical wave functions of the quark confined in the scalar linear potential, we solve the equation of motion of a scalar field, and reproduce the quark confinement potential. The equation of motion for the scalar field is a Poisson equation with a source made of quark wave functions. We solved the equation. Unfortunately, the solved scalar field has not only linear term of r but also a constant term and cubic term of r. We tried other wave functions, but the reproduced potentials have other power terms than the linear.

keywords: linear potential, analytical solution, Dirac equation, reproduced potential, Poisson equation

*東洋大学自然科学研究室 〒112-8606 東京都文京区白山 5-28-20
Natural Science Laboratory, Toyo University, 28-20 Hakusan 5, Bunkyo-ku, Tokyo 112-8606, Japan

1 はじめに

バリオンやメソンなどのハドロンがクォークからできていることは多くの実験から確かなことと考えられているが、クォークが単体で観測された例は存在しない。この現象はクォークの閉じ込め問題と呼ばれ、強い相互作用の特徴であるとみなされている。閉じ込め問題を説明しようとする試みはいろいろあるが、その一つに距離 r とともに無限に大きくなるポテンシャルを導入して、その中にクォークを閉じ込めようとするモデルがある。

クォークの閉じ込めポテンシャルとしては実験や数値計算の結果から線形ポテンシャルが想定されている(Eichten,E. et al.1975, Gunion,J.F. and R.S.Willey 1975, Gunion, J.F. and L.F.Li 1975, Kaushal,R.S. 1975, Kang, J.S. and H.J.Schnitzer 1975)。線形のポテンシャルを持つ Dirac 方程式の解析的な解は求まっている (Tezuka,H. 2013、2015、手塚洋一 2015、2017)。しかしながらこの線形ポテンシャルがどのように作られるのかはあまり議論されていない。

相対論的な閉じ込めポテンシャルはスカラーでなければならないことがわかっている (Shibata,Y. and H.Tezuka 1994、Tezuka,H. 1995、手塚洋一 1994、2002)。この論文ではスカラー粒子と相互作用するクォークの系を考える。この系のラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \overline{\psi}(x)\{i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - g_{S}s(x) - M\}\psi(x) + \frac{1}{2}\partial_{\mu}s(x)\partial^{\mu}s(x) \tag{1.1}$$

である。$\psi(x)$ は質量 M のクォークの場を表し、質量を持たないスカラー場は $s(x)$ で表され、g_S はクォークとスカラー場との相互作用の強さを表す結合定数である。γ^{μ} は 4 行 4 列の Dirac の γ 行列であり、μ、ν は 4 次元時空間の指標である。

このラグランジアン密度から導かれるクォークの運動方程式である Dirac 方程式は

$$\{i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - g_{S}s(x) - M\}\psi(x) = 0 \tag{1.2}$$

となり、スカラー場に対する Klein-Gordon 方程式は

$$\partial^{\mu}\partial_{\mu}s(x) = -g_{S}\overline{\psi}(x)\psi(x) \tag{1.3}$$

となる。この 2 つの運動方程式を連立して、自己無撞着な解を探る。

まずスカラー場をスカラーポテンシャルと読みかえ、線形のスカラーポテンシャルを仮定してクォークの運動方程式である Dirac 方程式(1.2)を考える。スカラー線形ポテンシャルを持つ Dirac 方程式の解はすでにわかっている。この解を使って、スカラー場の源となるクォークの状態を書き、スカラー場の運動方程式(1.3)を解く。この解が線形のポテンシャルを再現するかどうか検討する。

スカラー場の運動方程式である Klein-Gordon 方程式に時間依存性がないと仮定するとスカラー場と相互作用するクォークの波動関数からなる源を持つ Poisson 方程式となる。クォークの波動関数に角度依存性がなければこの方程式は簡単に変数分離ができ、動径方向成分だけの方程式に書き換えられる。この動径方向成分で書かれた Poisson 方程式を解析的に解かれたクォークの波動関数を使って解く。角運動量の指標 $\kappa = -1$ を持つ最も簡単な波動関数を使って解かれたスカラー場は線形項を持つが、この他に定数項と r^3 に比例する項を含む。他の波動関数を使った計算も実行したが、線形項だけを持つ解を求めることはできなかった。これらの不要な解を取り除く議論は今後の課題である。

2　クォークの状態

距離 r に比例する相対論的な線形ポテンシャルで粒子を閉じ込めるためにはポテンシャルはスカラーポテンシャルでなくてはならないことはすでに議論され知られている（Shibata,Y. and H.Tezuka 1994、Tezuka,H. 1995、手塚洋一 1994、2002）。この論文ではスカラー線形ポテンシャルを想定して議論する。スカラー線形ポテンシャルを持つ Dirac 方程式の解はすでに求められている (Tezuka,H. 2013, 手塚洋一 2015、2017)。

この論文ではまず質量 0 のスカラー場 $s(x)$ と相互作用するクォークのラグランジアン密度（1.1）から求められたクォークの運動方程式である Dirac 方程式

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - g_S s(x) - M\}\psi(x) = 0 \tag{2.1}$$

を考える。この式で

$$g_S s(x) => S(x) \tag{2.2}$$

と書き変え、$S(x)$ をスカラーポテンシャルと読みかえる。運動方程式（2.1）は

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - S(x) - M\}\psi(x) = 0 \tag{2.3}$$

となり、この式は質量 M のクォークがスカラーポテンシャル $S(x)$ の中で運動する状態を表すことになる。

スカラー線形ポテンシャル $S(r) = ar$ を持つ Dirac 方程式は $a > 0$ の場合に引力となり、方程式 (2.3) は

$$\{i\gamma^\mu\partial_\mu - ar - M\}\psi(x) = 0 \qquad a > 0 \tag{2.4}$$

と書き換えられる。この Dirac 方程式 (2.4) の解は知られており、最も簡単な解は

$$E = \sqrt{4a} = 4M \qquad a = 4M^2 \tag{2.5}$$

$$G(r) = c_1(r + Mr^2)e^{-2M^2r^2-Mr} \tag{2.6}$$

$$F(r) = -c_1 Mr^2 e^{-2M^2r^2-Mr} \tag{2.7}$$

$$\tag{2.8}$$

で与えられる。E は固有エネルギーであり、$G(r)$、$F(r)$ は 4 成分スピノール $\psi(x)$ を 2 成分の動径部分と角度部分に分け

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} i\dfrac{G(r)}{r}\,\varphi^l_{j,m}(\Omega) \\ \dfrac{F(r)}{r}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\,\varphi^l_{j,m}(\Omega) \end{pmatrix} \tag{2.9}$$

と書いたときの動径部分の上成分の解と下成分である。c_1 はのちに決める規格化定数である。この解は角運動量の指標 $\kappa = -1$ を持つ解のうちで波動関数の項数が最も少ないものであるが、エネルギー最小の解ではない。質量 M を固定するとより項数の多い解の方がエネルギーが小さくなる。クォークの全角運動量 J は $J = |\kappa| - \dfrac{1}{2}$ で与えられる。

波動関数の規格化条件は

$$\int(|G(r)|^2 + |F(r)|^2)dr = 1$$

である。実際に波動関数(2.6)、(2.7)を代入すると

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \{c_1^2(r+Mr^2)^2e^{-4M^2r^2-2Mr}+c_1^2M^2r^4e^{-4M^2r^2-2Mr}\}dr\\&=\int_0^\infty \frac{c_1^2}{M^2}(M^2r^2+2M^3r^3+2M^4r^4)e^{-4M^2r^2-2Mr}\frac{d(Mr)}{M}\\&=1\end{aligned} \tag{2.10}$$

となる。積分変数を無次元の変数 $Mr=x$ に変換すると規格化条件は

$$\frac{c_1^2}{M^3}\int_0^\infty (x^2+2x^3+2x^4)e^{-4x^2-2x}dx=1 \tag{2.11}$$

と書き換えられる。

規格化条件(2.11)の数値計算を行うと

$$\int_0^\infty (x^2+2x^3+2x^4)e^{-4x^2-2x}dx=0.04866589$$

となるので

$$\frac{c_1^2}{M^3}=\frac{1}{0.04866589}=20.548 \tag{2.12}$$

となる。

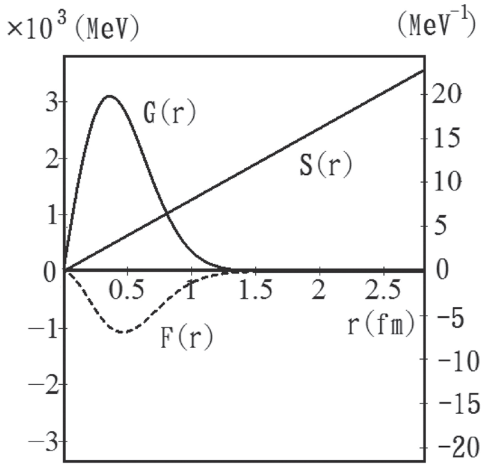

Fig. 1: ポテンシャルと波動関数

クォークの質量を

$$M=250\,\mathrm{MeV}$$

と仮定すると

$$a=4M^2=2.5\times10^5\,\mathrm{MeV}^2$$

$$\frac{c_1}{M} = 71.67\,\mathrm{MeV}^{-1}$$

となるので、この数値を使ってポテンシャルと波動関数を図示すると Fig.1 となる。横軸は r(fm) であり、左側の縦軸はポテンシャル $S(r)$ の目盛で $\times 10^3$(MeV) であり、右側は波動関数 $G(r)$、$F(r)$ の目盛で (MeV^{-1}) である。

3 スカラー場

線形スカラーポテンシャルの解であるクォークの波動関数を使って、スカラー場の Klein-Gordon 方程式 (1.3) の解を求める。

スカラー場 $s(x)$ に時間依存性がないと仮定して $s(x) = s(\boldsymbol{r})$ と書くと、(1.3) は

$$\boldsymbol{\nabla}^2 s(\boldsymbol{r}) = g_S \overline{\psi}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = g_S \rho_S(\boldsymbol{r}) \tag{3.1}$$

となる。クォークの波動関数についても時間依存性がないことを仮定している。これは電磁気学などで習う Poisson 方程式である。Poisson 方程式の解は Laplace 方程式の一般解に Poisson 方程式の特解を加えたもので記述される。右辺の $\rho_S(\boldsymbol{r}) = \overline{\psi}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r})$ の項を除いた Laplace 方程式は解を $s_L(\boldsymbol{r})$ と書き、球座標表示すると

$$\left\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\right\}s_L(\boldsymbol{r}) = 0 \tag{3.2}$$

となるが、$s_L(\boldsymbol{r}) = \sigma_L(r)\Theta(\theta)\Psi(\psi)$ とおいて変数分離すると

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_L(r)}{dr}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_L(r) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{d}{d\theta}(\sin\theta\frac{d\Theta(\theta)}{d\theta}) + \left\{\ell(\ell+1) - \frac{m^2}{\sin^2\theta}\right\}\Theta(\theta) = 0 \tag{3.4}$$

$$\frac{d^2}{d\psi^2}\Psi(\psi) + m^2\Psi(\psi) = 0 \tag{3.5}$$

と書ける。角度部分は球面調和関数となることが知られている。

$$\Theta(\theta)\Psi(\psi) = Y_\ell^m(\Omega) \tag{3.6}$$

動径方向成分 (3.3) の一般解は

$$\sigma_L(r) = \alpha r^\ell + \frac{\beta}{r^{\ell+1}} \tag{3.7}$$

と解ける。故に、Laplace 方程式の一般解 $s_L(\boldsymbol{r})$ は

$$s_L(\boldsymbol{r}) = \sum_{\ell,m}(\alpha_\ell r^\ell + \frac{\beta_\ell}{r^{\ell+1}})\,Y_\ell^m(\Omega) \tag{3.8}$$

である。ここで ℓ、m はスカラー場の軌道角運動量とその第 3 成分である。

Poisson 方程式 (3.1) の解は、Poisson 方程式の特解を $s_P(\boldsymbol{r})$ として

$$s_P(\boldsymbol{r}) + s_L(\boldsymbol{r}) = s_P(\boldsymbol{r}) + \sum_{\ell,m}(\alpha_\ell r^\ell + \frac{\beta_\ell}{r^{\ell+1}})Y_\ell^m(\Omega) \tag{3.9}$$

と書ける。次に、この Poisson 方程式の特解を求める。

運動方程式 (3.1) にこの解を代入すると

$$\begin{aligned}&\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\Big\}\{s_P(\boldsymbol{r}) + s_L(\boldsymbol{r})\}\\ &= g_S\rho_S(\boldsymbol{r})\end{aligned} \tag{3.10}$$

となるが、$s_L(\boldsymbol{r})$ は Laplace 方程式を満足しているのでこの式から消去され

$$\Big\{\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\frac{\partial}{\partial r}) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\psi^2}\Big\}s_P(\boldsymbol{r}) = g_S\rho_S(\boldsymbol{r}) \tag{3.11}$$

となる。$\rho_S(\boldsymbol{r})$ は球対称で角度依存性はないから Laplace 方程式と同様に変数分離でき、角度依存部分は球面調和関数 $Y_\ell^m(\Omega)$ となり、動径部分 $\sigma_P(r)$ の方程式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_P(r) = g_S\rho_S(r) \tag{3.12}$$

となる。これが解くべき方程式である。

線形のスカラーポテンシャル $S(r) = ar$ を持つ Dirac 方程式 (2.4) の $\kappa = -1$ の解として使われた

$$G(r) = c_1(r + Mr^2)e^{-2M^2r^2-Mr} \tag{3.13}$$

$$F(r) = -c_1Mr^2e^{-2M^2r^2-Mr} \tag{3.14}$$

を使うと ($\kappa = -1$ に対し $2J+1 = 2$ となる)

$$\begin{aligned}\rho_S(r) =& \overline{\psi}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\gamma^0\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2J+1}{4\pi r^2}\begin{pmatrix}G(r)\\F(r)\end{pmatrix}^\dagger\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}G(r)\\F(r)\end{pmatrix}\\ =&\frac{2J+1}{4\pi r^2}\{G^\dagger(r)G(r) - F^\dagger(r)F(r)\}\\ =&\frac{c_1^2}{2\pi}(1+2Mr)e^{-4M^2r^2-2Mr}\end{aligned} \tag{3.15}$$

となるから方程式 (3.12) は

$$\begin{aligned}\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_P(r) =& g_S\frac{c_1^2}{2\pi}(1+2Mr)e^{-4M^2r^2-2Mr}\\ =&A(1+2Mr)e^{-4M^2r^2-2Mr}\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる。ただしここで $A = \dfrac{1}{2\pi}g_Sc_1^2$ とおいた。この特解を

$$\sigma_P(r) = \sum_{k=0} a_kr^ke^{-4M^2r^2-2Mr} \tag{3.17}$$

と仮定すると

$$\frac{d}{dr}\sigma_P(r) = \sum_k a_k\{kr^{k-1} - r^k(8M^2 r + 2M)\}e^{-4M^2r^2-2Mr}$$
$$\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) = \sum_k a_k \frac{d}{dr}(kr^{k+1} - 8M^2r^{k+3} - 2Mr^{k+2})e^{-4M^2r^2-2Mr}$$
$$= \sum_k a_k\{k(k+1)r^k - 4(k+1)Mr^{k+1} - 4M^2(4k+5)r^{k+2}$$
$$+ 32M^3r^{k+3} + 64M^4r^{k+4}\}e^{-4M^2r^2-2Mr} \tag{3.18}$$

であるから、方程式(3.16)は

$$\sum_k a_k\{k(k+1)r^{k-2} - \ell(\ell+1)r^{k-2} - 4(k+1)Mr^{k-1}$$
$$- 4M^2(4k+5)r^k + 32M^3r^{k+1} + 64M^4r^{k+2}\}$$
$$= A(1+2Mr) \tag{3.19}$$

となる。$k \geq 0$ として展開すれば

$$A\,(1+2Mr)$$
$$= a_0\{-\ell(\ell+1)r^{-2} - 4Mr^{-1} - 20M^2r^0 + 32M^3r^1 + 64M^4r^2\}$$
$$+ a_1\{2r^{-1} - \ell(\ell+1)r^{-1} - 8Mr^0 - 36M^2r^1 + 32M^3r^2 + 64M^4r^3\}$$
$$+ a_2\{2\cdot 3r^0 - \ell(\ell+1)r^0 - 12Mr^1 - 4M^2\cdot 13r^2 + 32M^3r^3 + 64M^4r^4\}$$
$$+ a_3\{12r^1 - \ell(\ell+1)r^1 - 16Mr^2 - 4M^2\cdot 17r^3 + 32M^3r^4 + 64M^4r^5\}$$
$$+ a_4\{20r^2 - \ell(\ell+1)r^2 - 20Mr^3 - 4M^2\cdot 21r^4 + 32M^3r^5 + 64M^4r^6\}$$
$$+ \cdots\cdots \tag{3.20}$$

である。この式を r の恒等式と考え、両辺の同じ次数の係数を比較する。
まず $\ell = 0$ の場合には

$$r^{-1}\ : a_0(-4M) + a_1(2-0) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 2Ma_0$$
$$r^0\ : A = a_0(-20M^2) + a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 0)$$
$$\therefore\ a_2 = \frac{A}{6} + 6M^2a_0$$
$$r^1\ : 2MA = a_0(32M^3) + a_1(-36M^2) - 12M(\frac{A}{6} + 6M^2a_0) + 12a_3$$
$$\therefore\ a_3 = \frac{AM}{3} + \frac{28}{3}M^3a_0$$
$$r^2\ : 0 = a_0(64M^4) + a_1(32M^3) + a_2(-52M^2) + a_3(-16M)$$
$$+ a_4(4\cdot 5 - 0)$$
$$\therefore\ a_4 = \frac{7}{10}AM^2 + \frac{50}{3}M^4a_0$$

$\cdots\cdots\cdots$

となり、

$$\begin{aligned}\sigma_P(r) =&\{a_0 + 2Ma_0 r + (\frac{A}{6} + 6M^2 a_0)r^2 + (\frac{AM}{3} + \frac{28}{3}M^3 a_0)r^3 \\ &+ (\frac{7}{10}AM^2 + \frac{50}{3}M^4 a_0)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr}\end{aligned} \tag{3.21}$$

という解が求まる。以下同様に $a_5, a_6, \cdots$ が求まる。この級数が発散しないためには有限のどこかでこの係数が 0 となり、a_0 と A の関係が付き、a_0 の値が決まる。他のすべての係数は a_0 の値で決まる。

$\ell = 1$ の場合には

$$\begin{aligned}
r^{-2} &: a_0(-1\cdot 2) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0\\
r^{-1} &: a_1(2 - 1\cdot 2) = 0\\
r^{0} &: A = a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 2) \qquad \therefore\ a_2 = \frac{1}{4}A + 2Ma_1\\
r^{1} &: 2MA = a_1(-36M^2) + a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 2)\\
&\qquad \therefore\ a_3 = \frac{1}{2}AM + 6M^2 a_1\\
r^{2} &: 0 = a_1(32M^3) + a_2(-52M^2) + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 2)\\
&\qquad \therefore\ a_4 = \frac{7}{6}AM^2 + \frac{28}{3}M^3 a_1\\
&\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

となり、

$$\begin{aligned}\sigma_P(r) =&\{a_1 r + (\frac{1}{4}A + 2Ma_1)r^2 + (\frac{1}{2}AM + 6M^2 a_1)r^3 \\ &+ (\frac{7}{6}AM^2 + \frac{28}{3}M^3 a_1)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr}\end{aligned} \tag{3.22}$$

となる。この場合には a_1 の値ですべての係数の値が決まる。

$\ell = 2$ の場合には

$$\begin{aligned}
r^{-2} &: a_0(-2\cdot 3) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0\\
r^{-1} &: a_1(2 - 2\cdot 3) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0\\
r^{0} &: A = a_2(2\cdot 3 - 2\cdot 3) = 0
\end{aligned}$$

となるが、$A \neq 0$ であるから、r^0 の係数の式は成り立たず、$\ell = 2$ となる解は存在しないと結論できる。

$\ell = 3$ の場合は

$$\begin{aligned}
r^{-2} &: a_0(-3\cdot 4) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0\\
r^{-1} &: a_1(2 - 3\cdot 4) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0\\
r^{0} &: A = a_2(2\cdot 3 - 12) \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{6}A
\end{aligned}$$

$$r^1 \ : 2MA = a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 12) \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{6}A$$
$$r^2 \ : 0 = a_2(-52M^2) + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 12)$$
$$\therefore\ a_4 = -\frac{13}{12}AM^2 + 2Ma_3$$
$$r^3 \ : 0 = a_2(32M^3) + a_3(-68M^2) + a_4(-20M) + a_5(5\cdot 6 - 12)$$
$$\therefore\ a_5 = -\frac{49}{54}AM^3 + 6M^2a_3$$

となる。以下、同様に求まり解は存在し

$$\sigma_P(r) = \{-\frac{1}{6}Ar^2 + a_3r^3 + (-\frac{13}{12}AM^2 + 2Ma_3)r^4 + (-\frac{49}{54}AM^3 + 6M^2a_3)r^5 + \cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr} \tag{3.23}$$

となる。この場合には a_3 の値ですべての係数が決まる。

$\ell = 4$ の場合は

$$r^{-2} \ : a_0(-4\cdot 5) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0$$
$$r^{-1} \ : a_1(2 - 4\cdot 5) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0$$
$$r^0 \ : A = a_2(2\cdot 3 - 20)$$
$$A = -14a_2 \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{14}A$$
$$r^1 \ : 2MA = a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 20) \qquad \therefore\ a_3 = -\frac{1}{7}AM \tag{3.24}$$
$$r^2 \ : 0 = a_2(-52M^2) + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 20)$$
$$\therefore\ a_3 = -\frac{52}{16}Ma_2 = \frac{13}{56}MA \tag{3.25}$$

となり、(3.24) と (3.25) は明らかに矛盾する。これは $\ell = 4$ となる解が存在しないことを示している。以下同様に $\ell = 5, \ell = 6, \cdots$ の解も存在しないことが示せる。

ℓ はスカラー場の軌道角運動量に相当するから、特解の存在しない角運動量を持つスカラー場は存在しないと考えられる。Poisson 方程式 (3.1) の解は、(3.13)、(3.14) で与えられたクォークの状態 ($\kappa = -1$) に対しては

$$\begin{aligned}
s(\boldsymbol{r}) =& s_L(\boldsymbol{r}) + s_P(\boldsymbol{r}) \\
=& [\alpha_0 r^0 + \frac{\beta_0}{r} + \{a_0 + 2Ma_0r + (\frac{A}{6} + 6M^2a_0)r^2 + (\frac{AM}{3} + \frac{28}{3}M^3a_0)r^3 \\
&+ (\frac{7}{10}AM^2 + \frac{50}{3}M^4a_0)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr}]\,Y_0^0 \\
&+ \sum_m [\alpha_1 r + \frac{\beta_1}{r^2} + \{a_1r + (\frac{1}{4}A + 2Ma_1)r^2 + (\frac{1}{2}AM + 6M^2a_1)r^3 \\
&+ (\frac{7}{6}AM^2 + \frac{28}{3}M^3a_1)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr}]\,Y_1^m \\
&+ \sum_m [\alpha_3 r^3 + \frac{\beta_3}{r^4} + \{-\frac{1}{6}Ar^2 + a_3r^3 + (-\frac{13}{12}AM^2 + 2Ma_3)r^4
\end{aligned}$$

$$+(-\frac{49}{54}AM^3+6M^2a_3)r^5+\cdots\cdots\}e^{-4M^2r^2-2Mr}]\,Y_3^m \tag{3.26}$$

となる。Mr の大きな領域を考えれば、指数関数のついた部分は非常に小さくなるとして無視できる。同様の理由で r^n $(n<0)$ の項も無視すると

$$s(\boldsymbol{r})=\alpha_0 r^0 Y_0^0+\alpha_1 r^1\sum_m Y_1^m+\alpha_3 r^3\sum_m Y_3^m \tag{3.27}$$

となる。スカラーポテンシャル $S(r)=g_S s(r)$ は線形 r の項だけとはならず、定数項と r^3 の項が存在する。定数項は Dirac 方程式でクォークの質量に繰り込まれ最終的にはなくなる。線形項は $\alpha_1=\dfrac{a}{g_S}$ と取ることによって仮定した線形ポテンシャルと一致する。r^3 の項に関しては $\alpha_3=0$ と取ればなくなり、自己無撞着な解が求まが、この段階でこの項を消す合理的な理由は見つからない。

4 波動関数の変更

線形のスカラーポテンシャル $S(r)=ar$ を持つ Dirac 方程式の $\kappa=-1$ に対応するよりエネルギーの小さな解

$$E=\sqrt{6a}=(-4+2\sqrt{10})M \qquad a=\frac{28-8\sqrt{10}}{3}M^2 \tag{4.1}$$

$$G(r)=c_1\{r+Mr^2-\frac{4}{3}(3-\sqrt{10})M^2r^3\}e^{-ar^2/2-Mr} \tag{4.2}$$

$$F(r)=c_1\frac{5-2\sqrt{10}}{3}\{Mr^2+\frac{4}{15}(5-\sqrt{10})M^2r^3\}e^{-ar^2/2-Mr} \tag{4.3}$$

を使って自己無撞着な解が得られるか検討する。

E はエネルギーであり、M はクォークの質量である。

Laplace 方程式の一般解 $s_L(\boldsymbol{r})$ は式（3.8）と変わらず

$$s_L(\boldsymbol{r})=\sum_{\ell,m}(\alpha_\ell r^\ell+\frac{\beta_\ell}{r^{\ell+1}})\,Y_\ell^m(\Omega) \tag{4.4}$$

である。ℓ、m はスカラー場の軌道角運動量とその第 3 成分である。

Poisson 方程式(3.1)の解は、前章の議論と同様、Poisson 方程式の特解を $s_P(\boldsymbol{r})$ として

$$s_P(\boldsymbol{r})+s_L(\boldsymbol{r})=s_P(\boldsymbol{r})+\sum_{\ell,m}(\alpha_\ell r^\ell+\frac{\beta_\ell}{r^{\ell+1}})Y_\ell^m(\Omega) \tag{4.5}$$

となり、Poisson 方程式の特解は角度依存部分は球面調和関数 $Y_\ell^m(\Omega)$ となり、動径部分 $\sigma_P(r)$ の方程式は

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr})-\frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_P(r)=g_S\rho_S(r) \tag{4.6}$$

となる。

右辺の $\rho_S(r)$ の計算に $\kappa=-1$ の解 (4.2)、(4.3) を使うと

$$
\begin{aligned}
\rho_S(r) =&\overline{\psi}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\gamma^0\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2J+1}{4\pi r^2}\begin{pmatrix} G(r) \\ F(r)\end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} G(r) \\ F(r)\end{pmatrix} \\
=&\frac{2J+1}{4\pi r^2}\{G^\dagger(r)G(r) - F^\dagger(r)F(r)\} \\
=&\frac{1}{2\pi r^2}\Big[(\frac{c_1}{M})^2\{x+x^2-\frac{4}{3}(3-\sqrt{10})x^3\}^2 e^{-ar^2-2x} \\
&-(\frac{c_1}{M})^2(\frac{5-2\sqrt{10}}{3})^2\{x^2+\frac{4}{15}(5-\sqrt{10})x^3\}e^{-ar^2-2x}\Big] \\
=&\frac{c_1^2}{2\pi}\Big\{1+2x-\frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})x^2 \\
&-\frac{8}{9}(44-14\sqrt{10})x^3\Big\}e^{-ar^2-2x}
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

となる。ただし $Mr=x$ と書き換えた。$\kappa\ -1$ に対し $2J+1=2$ となる。

方程式 (4.6) は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_P(r) \\
&= g_S\frac{c_1^2}{2\pi}(1+2Mr-\frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})(Mr)^2 \\
&\quad -\frac{8}{9}(44-14\sqrt{10})(Mr)^3\Big\}e^{-ar^2-2Mr} \\
&= A\Big\{1+2Mr-\frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})(Mr)^2 \\
&\quad -\frac{8}{9}(44-14\sqrt{10})(Mr)^3\Big\}e^{-ar^2-2Mr}
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

となる。ただしここで $A=\dfrac{1}{2\pi}g_S c_1^2$ とおいた。この特解を

$$
\sigma_P(r) = \sum_{k=0} a_k r^k e^{-ar^2-2Mr} \qquad a = \frac{28-8\sqrt{10}}{3}M^2 = \frac{4(7-2\sqrt{10})}{3}M^2
\tag{4.9}
$$

と仮定すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\sigma_P(r) =& \sum_k a_k\{kr^{k-1} - r^k(2ar+2M)\}e^{-ar^2-2Mr} \\
\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) =& \sum_k a_k \frac{d}{dr}(kr^{k+1} - 2ar^{k+3} - 2Mr^{k+2})e^{-ar^2-2Mr} \\
=& \sum_k a_k\{k(k+1)r^k - 4(k+1)Mr^{k+1} \\
&-(\frac{16(7-2\sqrt{10})}{3}k + 52 - 16\sqrt{10})M^2 r^{k+2} \\
&+\frac{32}{3}(7-2\sqrt{10})M^3 r^{k+3} \\
&+\frac{64}{9}(89-28\sqrt{10})M^4 r^{k+4}\}e^{-ar^2-2Mr}
\end{aligned}
\tag{4.10}
$$

であるから、方程式(4.8)は

$$
\begin{aligned}
&\sum_k a_k\{k(k+1)r^{k-2} - \ell(\ell+1)r^{k-2} - 4(k+1)Mr^{k-1} \\
&\quad - (\frac{16(7-2\sqrt{10})}{3}k + 52 - 16\sqrt{10})M^2 r^k \\
&\quad + \frac{32}{3}(7-2\sqrt{10})M^3 r^{k+1} + \frac{64}{9}(89-28\sqrt{10})M^4 r^{k+2}\} \\
&= A\Big\{1 + 2Mr - \frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})(Mr)^2 - \frac{8}{9}(44-14\sqrt{10})(Mr)^3\Big\} \qquad (4.11)
\end{aligned}
$$

となる。この式を r の恒等式と考え、両辺の同じ次数の係数を比較する。

$\ell = 0$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-1} &: a_0(-4M) + a_1(2-0) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 2Ma_0 \\
r^{0} &: A = -a_0((52-16\sqrt{10})M^2) + a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 0) \\
&\qquad \therefore\ a_2 = \frac{A}{6} + \frac{2(17-4\sqrt{10}}{3}M^2 a_0 \\
r^{1} &: 2MA = a_0\frac{32(7-2\sqrt{10}}{3}M^3 \\
&\quad - a_1(\frac{16(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 - a_2 12M + 12a_3 \\
&\qquad \therefore\ a_3 = \frac{AM}{3} + \frac{4}{3}(15-4\sqrt{10})M^3 a_0 \\
r^{2} &: -\frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})M^2 A = a_0\frac{64}{9}(89-28\sqrt{10})M^4 \\
&\quad + a_1\frac{32}{3}(7-2\sqrt{10})M^3 - a_2(\frac{32(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 \\
&\quad - a_3(16M) + a_4(20) \\
&\qquad \therefore\ a_4 = (-\frac{3}{2} + \frac{13}{45}\sqrt{10})AM^2 - \frac{11980-3776\sqrt{10}}{45}M^4 a_0
\end{aligned}
$$

である。以下同様に $a_5, a_6, \cdots$ が求まり、発散しないためには有限のどこかでこの係数が 0 となり a_0 と A の関係が付く。他の係数は a_0 の値で決まる。

$\ell = 1$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-2} &: a_0(-1\cdot 2) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0 \\
r^{-1} &: a_1(2 - 1\cdot 2) = 0 \\
r^{0} &: A = a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 2) \qquad \therefore\ a_2 = \frac{1}{4}A + 2Ma_1 \\
r^{1} &: 2MA = -a_1(\frac{16(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 \\
&\quad + a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 2) \\
&\qquad \therefore\ a_3 = \frac{1}{2}AM + \frac{34-8\sqrt{10}}{3}M^2 a_1 \\
r^{2} &: -\frac{4}{9}(32-11\sqrt{10})M^2 A
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= a_1 \frac{32}{3}(7-2\sqrt{10})M^3 \\
&\quad - a_2(\frac{32(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 + a_3(-16M) \\
&\quad + a_4(4\cdot 5 - 2) \\
&\quad \therefore\ a_4 = \frac{85-40\sqrt{10}}{162}M^2 A - \frac{4+16\sqrt{10}}{27}M^3 a_1
\end{aligned}
$$

となり、以下同様に $a_5, a_6, \cdots$ が求まる。a_1 の値ですべての係数の値が決まる。
$\ell = 2$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-2}\ &: a_0(-2\cdot 3) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0 \\
r^{-1}\ &: a_1(2 - 2\cdot 3) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0 \\
r^{0}\ &: A = a_2(2\cdot 3 - 2\cdot 3) = 0
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

となり、$A \neq 0$ であるから $\ell = 2$ となる解は存在しない。
$\ell = 3$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-2}\ &: a_0(-3\cdot 4) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0 \\
r^{-1}\ &: a_1(2 - 3\cdot 4) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0 \\
r^{0}\ &: A = a_2(2\cdot 3 - 12) \\
&\quad A = -6a_2 \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{6}A \\
r^{1}\ &: 2MA = a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 12) \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{6}A \\
r^{2}\ &: -\frac{4}{9}(32 - 11\sqrt{10})M^2 A = -a_2(\frac{32(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 \\
&\quad + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 12) \\
&\qquad \therefore\ a_4 = 2Ma_3 - (\frac{53}{12} - \frac{25}{18}\sqrt{10})M^2 A
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

となり、以下同様に $a_5, a_6, \cdots$ が求まる。この場合には a_3 の値ですべての係数が決まる。
$\ell = 4$ の場合には

$$
\begin{aligned}
r^{-2}\ &: a_0(-4\cdot 5) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0 \\
r^{-1}\ &: a_1(2 - 4\cdot 5) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 0 \\
r^{0}\ &: A = a_2(2\cdot 3 - 20) \\
&\quad A = -14a_2 \qquad \therefore\ a_2 = -\frac{1}{14}A \\
r^{1}\ &: 2MA = a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 20) \qquad \therefore\ a_3 = -\frac{1}{7}AM \\
r^{2}\ &: -\frac{4}{9}(32 - 11\sqrt{10})M^2 A = -(\frac{32(7-2\sqrt{10})}{3} + 52 - 16\sqrt{10})M^2 a_2 \\
&\quad + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 20)
\end{aligned}
\tag{4.14}
$$

$$\therefore\ a_3 = \frac{733 - 238\sqrt{10}}{508}AM \tag{4.15}$$

となるが、(4.14) と (4.15) は明らかに矛盾し $\ell = 4$ の解は存在しない。以下同様に $\ell = 5, \ell = 6, \cdots$ の解は存在しない

ℓ はスカラー場の軌道角運動量に相当するから、特解の存在しない角運動量を持つスカラー場は存在しない。Poisson 方程式 (3.1) の解は

$$\begin{aligned}
s(\boldsymbol{r}) =& s_0(\boldsymbol{r}) + s_P(\boldsymbol{r}) \\
=&[\alpha_0 r^0 + \frac{\beta_0}{r} + \{a_0 + 2Ma_0 r + (\frac{A}{6} + 6M^2 a_0)r^2 + (\frac{AM}{3} + \frac{28}{3}M^3 a_0)r^3 \\
&+ (\frac{7}{10}AM^2 + \frac{50}{3}M^4 a_0)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-ar^2-2Mr}]Y_0^0 \\
&+ [\alpha_1 r^1 + \frac{\beta_1}{r^2} + \{a_1 r + (\frac{1}{4}A + 2Ma_1)r^2 + (\frac{1}{2}AM + 6M^2 a_1)r^3 \\
&+ (\frac{7}{6}AM^2 + \frac{28}{3}M^3 a_1)r^4 + \cdots\cdots\}e^{-ar^2-2Mr}]\sum_m Y_1^m \\
&+ [\alpha_1 r^3 + \frac{\beta_1}{r^4} + \{-\frac{1}{6}Ar^2 + a_3 r^3 + (-\frac{13}{12}AM^2 + 2Ma_3)r^4 \\
&+ (-\frac{49}{54}AM^3 + 6M^2 a_3)r^5 + \cdots\cdots\}e^{-ar^2-2Mr}]\sum_m Y_3^m
\end{aligned} \tag{4.16}$$

となる。Mr の大きな領域を考えれば、指数関数のついた部分、r^n $(n < 0)$ の項は無視できる。

$$s(\boldsymbol{r}) = \alpha_0 r^0 Y_0^0 + \alpha_1 r^1 \sum_m Y_1^m + \alpha_3 r^3 \sum_m Y_3^m \tag{4.17}$$

となり、やはり $\ell = 0, 1, 3$ に対応する解が残り、線形ポテンシャルだけにはならない。

もう 1 つの例として主系列の 2 番目の解 $\kappa = -2$

$$E = \sqrt{6a} = 6M \qquad a = 6M^2 \tag{4.18}$$

$$G(r) = c_2(r^2 + Mr^3)e^{-3M^2r^2-Mr} \tag{4.19}$$

$$F(r) = -c_2 Mr^3 e^{-3M^2r^2-Mr} \tag{4.20}$$

を検討してみる。

$\rho_S(r)$ は

$$\begin{aligned}
\rho_S(r) =& \overline{\psi}(\boldsymbol{r})\psi(\boldsymbol{r}) = \psi^\dagger(\boldsymbol{r})\gamma^0\psi(\boldsymbol{r}) = \frac{2J+1}{4\pi r^2}\begin{pmatrix} G(r) \\ F(r) \end{pmatrix}^\dagger \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G(r) \\ F(r) \end{pmatrix} \\
=& \frac{2J+1}{4\pi r^2}\{G^\dagger(r)G(r) - F^\dagger(r)F(r)\} \\
=& \frac{1}{\pi r^2}\Big[(\frac{c_2}{M^2})^2(x^2 + x^3)^2 e^{-6x^2-2x} - (\frac{c_2}{M^2})^2(x^3)^2 e^{-6x^2-2x}\Big] \\
=& \frac{c_2^2}{\pi M^2}(x^2 + 2x^3)e^{-6x^2-2x}
\end{aligned} \tag{4.21}$$

となる。ただし $Mr = x$ と書き換えた。$\kappa = -2$ に対しては $2J + 1 = 4$ となる。

方程式(3.12)は

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2}\sigma_P(r) \\
&= g_S\frac{c_2^2}{\pi M^2}(x^2+2x^3)e^{-6x^2-2x} \\
&= A(x^2+2x^3)e^{-6x^2-2x} \qquad (4.22)
\end{aligned}
$$

となる。ただしここで $A = \frac{1}{\pi}g_S(\frac{c_2}{M})^2$ とおいた。この特解を

$$
\sigma_P(r) = \sum_{k=0} a_k r^k e^{-6M^2r^2-2Mr} \qquad (4.23)
$$

と仮定すると

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{dr}\sigma_P(r) &= \sum_k a_k\{kr^{k-1} - r^k(12M^2r+2M)\}e^{-6M^2r^2-2Mr} \\
\frac{d}{dr}(r^2\frac{d\sigma_P(r)}{dr}) &= \sum_k a_k\frac{d}{dr}(kr^{k+1} - 2Mr^{k+2} - 12M^2r^{k+3})e^{-6M^2r^2-2Mr} \\
&= \sum_k a_k[k(k+1)r^k - 4(k+1)Mr^{k+1} \\
&\quad - \{12M^2(2k+3) - 4M^2\}r^{k+2} \\
&\quad + 48M^3r^{k+3} + 144M^4r^{k+4}]e^{-6M^2r^2-2Mr}
\end{aligned}
$$

であるから、方程式(4.22)は

$$
\begin{aligned}
&\sum_k a_k\{k(k+1)r^{k-2} - \ell(\ell+1)r^{k-2} - 4(k+1)Mr^{k-1} \\
&\qquad - 8M^2(3k+4)r^k + 48M^3r^{k+1} + 144M^4r^{k+2}\} \\
&= A\{(Mr)^2 + 2(Mr)^3\} \qquad (4.24)
\end{aligned}
$$

となる。

展開すると

$$
\begin{aligned}
&AM^2(r^2+2Mr^3) \\
&= a_0\{-\ell(\ell+1)r^{-2} - 4Mr^{-1} - 32M^2r^0 + 48M^3r^1 + 144M^4r^2\} \\
&\quad + a_1\{2r^{-1} - \ell(\ell+1)r^{-1} - 8Mr^0 - 56M^2r^1 + 48M^3r^2 + 144M^4r^3\} \\
&\quad + a_2\{2\cdot 3r^0 - \ell(\ell+1)r^0 - 12Mr^1 - 80M^2r^2 + 48M^3r^3 + 144M^4r^4\} \\
&\quad + a_3\{12r^1 - \ell(\ell+1)r^1 - 16Mr^2 - 8M^2\cdot 13r^3 + 48M^3r^4 + 144M^4r^5\} \\
&\quad + a_4\{20r^2 - \ell(\ell+1)r^2 - 20Mr^3 - 8M^2\cdot 16r^4 + 48M^3r^5 + 144M^4r^6\} \\
&\quad + a_5\{30r^3 - \ell(\ell+1)r^3 - 24Mr^4 - 8M^2\cdot 19r^5 + 48M^3r^6 + 144M^4r^7\} \\
&\quad + \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

となり、この式を r の恒等式と考え、両辺の同じ次数の係数を比較する。

$\ell = 0$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-1}\ &: a_0(-4M) + a_1(2-0) = 0 \qquad \therefore\ a_1 = 2Ma_0 \\
r^{0}\ &: a_0(-32M^2) + a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 0) = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_2 = 8M^2 a_0 \\
r^{1}\ &: a_0 48M^3 + a_1(-56M^2) - a_2 12M + 12a_3 = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_3 = \frac{40}{3}M^3 a_0 \\
r^{2}\ &: M^2A = a_0 144M^4 + a_1 48M^3 - a_2(-80M^2) - a_3(16M) + a_4 20 \\
&\qquad \therefore\ a_4 = \frac{1}{20}AM^2 + \frac{92}{3}M^4 a_0 \\
r^{3}\ &: 2M^3A = a_1 144M^4 + a_2 48M^3 + a_3(-8\cdot 13M^2) - a_4(20M) + a_5 30 \\
&\qquad \therefore\ a_5 = \frac{1}{10}AM^3 + \frac{664}{15}M^5 a_0 \\
r^{4}\ &: a_2 144M^4 + a_3 48M^3 + a_4(-8\cdot 16M^2) - a_5(24M) + a_6 42 = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_6 = \frac{22}{105}AM^4 + \frac{3424}{45}M^5 a_0
\end{aligned}
$$

となる。以下同様に $a_7, a_8, \cdots$ が求まり、有限のどこかでこの係数が 0 となり、a_0 と A の関係が決まる。他の係数は a_0 の値で与えられる。

$\ell = 1$ の場合

$$
\begin{aligned}
r^{-2}\ &: a_0(-1\cdot 2) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0 \\
r^{-1}\ &: a_1(2 - 1\cdot 2) = 0 \\
r^{0}\ &: a_1(-8M) + a_2(2\cdot 3 - 2) = 0 \qquad \therefore\ a_2 = 2Ma_1 \\
r^{1}\ &: a_1(-56M^2) + a_2(-12M) + a_3(3\cdot 4 - 2) = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_3 = 8M^2 a_1 \\
r^{2}\ &: M^2A = a_1(48M^3) + a_2(-80M^2) + a_3(-16M) + a_4(4\cdot 5 - 2) \\
&\qquad \therefore\ a_4 = \frac{1}{18}M^2A + \frac{40}{3}M^3 a_1 \\
r^{3}\ &: 2M^3A = a_1(144M^4) + a_2(48M^3) + a_3(-8\cdot 13M^2) \\
&\qquad + a_4(-20M) + a_5(30-2) \\
&\qquad \therefore\ a_5 = \frac{1}{9}M^3A + \frac{92}{3}M^4 a_1 \\
r^{4}\ &: a_2(144M^4) + a_3(48M^3) + a_4(-8\cdot 16M^2) + a_5(-24M) \\
&\qquad + a_6(42-2) = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_6 = \frac{11}{45}M^4A + \frac{664}{15}M^5 a_1
\end{aligned}
$$

である。以下同様に $a_7, a_8, \cdots$ が求まり、これらの係数の値は a_1 の値で決まる。

$\ell = 2$ の場合

$$
r^{-2}\ : a_0(-2\cdot 3) = 0 \qquad \therefore\ a_0 = 0
$$

$$\begin{aligned}
r^{-1} &: a_1(2-2\cdot 3)=0 \qquad \therefore\ a_1=0 \\
r^{0} &: a_2(2\cdot 3-2\cdot 3)=0 \\
r^{1} &: a_2(-12M)+a_3(3\cdot 4-2\cdot 3)=0 \qquad \therefore\ a_3=2Ma_2 \\
r^{2} &: M^2A=a_2(-80M^2)+a_3(-16M)+a_4(4\cdot 5-2\cdot 3) \\
&\qquad \therefore\ a_4=\frac{1}{14}M^2A+8M^2a_2 \\
r^{3} &: 2M^3A=a_2(48M^3)+a_3(-8\cdot 13M^2)+a_4(-20M)+a_5(30-6) \\
&\qquad \therefore\ a_5=\frac{1}{7}M^3A+\frac{40}{3}M^3a_2
\end{aligned}$$

となり、以下同様に $a_6, a_7, \cdots$ が求まる。これらの係数の値は a_2 の値で決まる。
$\ell=3$ の場合

$$\begin{aligned}
r^{-2} &: a_0(-3\cdot 4)=0 \qquad \therefore\ a_0=0 \\
r^{-1} &: a_1(2-3\cdot 4)=0 \qquad \therefore\ a_1=0 \\
r^{0} &: a_2(2\cdot 3-12)=0 \qquad \therefore\ a_2=0 \\
r^{1} &: a_3(3\cdot 4-12)=0 \\
r^{2} &: M^2A=a_3(-16M)+a_4(20-12) \qquad \therefore\ a_4=\frac{1}{8}M^2A+2Ma_3 \\
r^{3} &: 2M^3A=a_3(-8\cdot 13M^2)+a_4(-20M)+a_5(30-12) \\
&\qquad \therefore\ a_5=\frac{1}{4}M^3A+8M^2a_3
\end{aligned}$$

となる。以下同様に $a_6, a_7, \cdots$ が求まる。係数の値は a_3 の値で決まる。
$\ell=4$ の場合には

$$\begin{aligned}
&a_0=a_1=a_2=a_3=0 \\
r^{2} &: M^2A=a_4(4\cdot 5-4\cdot 5)=0
\end{aligned}$$

となり、$A\neq 0$ より $\ell=4$ の解は存在しない。
$\ell=5$ の場合には

$$\begin{aligned}
&a_0=a_1=a_2=a_3=0 \\
r^{2} &: M^2A=a_4(4\cdot 5-5\cdot 6) \qquad \therefore\ a_4=-\frac{1}{10}M^2A \\
r^{3} &: 2M^3A=a_4(-20M)+a_5(5\cdot 6-5\cdot 6) \\
&\qquad \therefore\ a_4=-\frac{1}{10}M^2A \\
r^{4} &: a_4(-8\cdot 16M^2)+a_5(-24M)+a_6(42-30)=0 \\
&\qquad \therefore\ a_6=-\frac{16}{15}M^4A+2Ma_5
\end{aligned}$$

となり、以下同様に $a_7, a_8, \cdots$ が求まる。係数の値は a_5 の値で決まる。

$\ell = 6$ の場合は

$$
\begin{aligned}
&a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0 \\
r^2 \ &: M^2 A = a_4(4\cdot 5 - 6\cdot 7) \qquad \therefore\ a_4 = -\frac{1}{22}M^2 A \\
r^3 \ &: 2M^3 A = a_4(-20M) + a_5(5\cdot 6 - 6\cdot 7) \\
&\qquad \therefore\ a_5 = -\frac{1}{11}M^3 A \qquad (4.25) \\
r^4 \ &: a_4(-8\cdot 16M^2) + a_5(-24M) + a_6(42-42) = 0 \\
&\qquad \therefore\ a_5 = \frac{8}{33}M^3 A \qquad (4.26)
\end{aligned}
$$

となるが、(4.25)と(4.26)は成り立たず、$\ell = 6$ の解は存在しないと結論できる。同様に $\ell = 7, \ell = 8, \cdots$ の解は存在しないことがわかる。

結局、$\ell = 0, 1, 2, 3, 5$ に対応する解が残り、$\ell = 4, 6, 7, \cdots$ に対応する解は存在しない。

この解も r の線形項だけではなく、より次数の高い項が残る。

5 まとめ

クォークの閉じ込めポテンシャルとして使われる線形ポテンシャルの自己無撞着な解を検討した。相対論的にクォークをポテンシャル内部に閉じ込めるためにはスカラー形のポテンシャルでなければならないので、引力のスカラー線形ポテンシャルを仮定した。スカラー線形ポテンシャルを持つ Dirac 方程式の解析的な解は求まっているので、クォークの状態としてその解析解を適用して逆にスカラー場を解き、最初に仮定したポテンシャルが再現されるか議論した。r の大きな領域で近似的に定数+線形型+ r^3 に比例するスカラー場が求まる。

$$s(\boldsymbol{r}) = \alpha_0 r^0 Y_0^0 + \alpha_1 r^1 \sum_m Y_1^m + \alpha_3 r^3 \sum_m Y_3^m \qquad (5.27)$$

r^3 に比例する項は $\alpha_3 = 0$ と取り消去するしか方法はない。残りの部分はスカラーポテンシャルとして

$$S(\boldsymbol{r}) = g_s s(\boldsymbol{r}) = g_s \alpha_0 r^0 Y_0^0 + g_s \alpha_1 r^1 \sum_m Y_1^m = S_0 + \beta_1 r \qquad (5.28)$$

の形になる。これを(2.3)に代入すると運動方程式(2.1)は

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - S_0 - \beta_1 r - M\}\psi = 0 \qquad (5.29)$$

となる。これが(2.4)

$$\{i\gamma^\mu \partial_\mu - ar - M\}\psi = 0 \qquad a > 0 \qquad (5.30)$$

と一致するためには

$$S_0 + M => M \qquad (5.31)$$

$$\beta_1 => a \qquad (5.32)$$

となればよい。すなわち、ポテンシャルとしては定数項が存在するが、その定数はクォークの質量に繰り込まれ、運動方程式には直接あらわれず、線形ポテンシャルのみが存在するように見える。

クォークの状態としていくつかの異なる場合を検討したがスカラー場として線形の項だけが残るような解は見つからなかった。

参考文献

Eichten, E. et al. (1975) Spectrum of Charged Quark-Antiquark Bound States. Phys.Rev.Lett. 34: 369-372.

Gunion, J.F. and L.F.Li (1975) RelativisticTreatment of the Quark-Confinement Potential. Phys.Rev.D 12 : 3583-3588.

Gunion, J.F. and R.S.Willey (1975) Hadron Spectroscopy for a Linear Quark Containment Potential. Phys.Rev.D 12 : 174-186.

Kang, J.S. and H.J.Schnitzer (1975) Dynamics of Light and Heavy Bound Quarks. Phys.Rev.D 12 : 841-854.

Kaushal, R.S. (1975) Pion Form Factor and the Quark Model for the Spectrum of Heavy Mesons. Phys.Lett. 57B : 354-356

Kaushal, R.S. (1975) Is $\psi'(3695)$ a Radial Excitation of $\psi(3105)$?. Phys.Lett. 60B : 81-83

Shibata, Y. and H.Tezuka (1994) Confinement and Infinite Potential. Z.Phys.C 62 : 533-537.

Tezuka, H. (1995) Confinement by Polynomial Potentials. Z.Phys.C 65 : 101-104.

Tezuka, H. (2013) Analytical Solutions of the Dirac Equation with a Scalar Linear Potential. AIP Advances 3 : 082135_1-17.

Tezuka, H. (2015) Bound State Solutions of Dirac Equation with Repulsive Scalar Linear Potential. AIP Advances 5 : 087113_1-6

手塚洋一 (1994) クラインパラドックスと閉じ込め. 東洋大学紀要 自然科学篇 第 38 号 : 1-17.

手塚洋一 (2002) 無限大ポテンシャルによる閉じ込め問題. 東洋大学紀要 自然科学篇 第 46 号 : 1-20.

手塚洋一 (2015) 線形ポテンシャルを持つ Dirac 方程式の束縛解. 東洋大学紀要 自然科学篇 第 59 号 : 97-154.

手塚洋一 (2017) QCD へのスカラーポテンシャルの導入. 東洋大学紀要 自然科学篇 第 61 号 : 135-157.

手塚洋一 (2017) Dirac 方程式のポテンシャル問題. 東洋大学出版会.