

ラムゼイ・モデルにおいて財政支出が消費・資本・利子率に与える影響について — 解析的に解く —

齋 藤 孝

1. はじめに
 2. 体系の定式化
 3. 位相図による直観的説明
 4. 消費・資本・利子率のダイナミックス
 5. 結論
- (補論) 一般解の導出の詳細について

1. はじめに

現代のマクロ経済理論の基底をなしているラムゼイ＝キャス＝クープマンズの新古典派成長モデル（以下ラムゼイ・モデルと略称する）において、定常状態にある経済における財政支出の予想されない増加が経済に与える影響について、次の命題（以下命題GEと略称する）が知られている。

「財政支出の増加が一時的（temporary）な場合には、財政支出の増加は消費の減少によって打ち消されることはなく、一時的な実質利子率の上昇と資本ストックの減少、すなわちクラウディング・アウトを引き起こす。財政支出の増加が恒久的（permanent）な場合には、財政支出の増加時点において、消費がそれと同額だけ減少し、実質利子率や資本ストックには影響がなく、クラウディング・アウトは起こらない。」

Barro [1987] はイギリスにおける利子率と軍事支出の歴史データを用いて、命題GEの実証を試みている。

財政支出と消費・資本・利子率の関係については、Romer [2012; ch.2] やLjungqvist and Sargent [2018; ch.11] など大学院レベルのマクロ経済学の教科書でも説明されている。しかしながらそれらの説明は、動学体系の位相図を用いた直観的な説明や数値計算によるものであり、動学体系を解析的に解いた厳密な分析はなされていないのが現状である。そこで本論では、ラムゼイ・モデルの連立微分方程式体系を解析的に解き、命題GEの厳密な導出を試みる。

以下、本論の構成は次のとおりである。第2節では政府の財政支出を含むラムゼイ・モデルを構

築し、連立微分方程式の体系を定式化する。第3節では、位相図を用いて命題GEの直観的な説明を行う。第4節では、連立微分方程式の体系を解析的に解き、命題GEの厳密な導出を試みる。第5節は結論とする。

2. 体系の定式化

ここではRomer [2012; Chapter 2] に依拠しつつ、ラムゼイ・モデルの体系を構築する。ラムゼイ・モデルそのものについては、もはや現代のスタンダードとしてあまりにも知られているので、多言を擁しないであろう。従ってモデルの説明はできるだけ簡略化し、必要最小限にとどめることとする。

時間は連続的であるとする。家計は無限大のタイム・スパンを持ち、労働と資本を所有し、実質利子率と実質賃金を与件として、予算制約のもとで各時点における瞬時効用の割引現在価値の総和を最大化するように行動する。また人口の変化とハロッド中立的な技術進歩が存在し、人口の変化率と技術進歩率は一定の値であると仮定する。

家計の瞬時効用関数 u については、相対的リスク回避度一定 (CRRA) の型に設定する。

$$u = A(0)^{1-\theta} e^{(1-\theta)gt} \frac{c^{1-\theta}}{1-\theta} \quad (1)$$

ただし $A(0)$ は初期時点における労働効率の水準、 θ は正の定数、 g は技術進歩率、 t は時間、 c は効率労働1人当たりの消費量である。また瞬時効用の現在価値の総和が発散しないように、次の条件が仮定される。

$$\rho - n - (1 - \theta)g > 0 \quad (2)$$

ただし ρ は家計の割引率、 n は人口の変化率である。

企業は規模に関して収穫不変の生産技術により資本と労働を用いて、各時点の利潤を最大化するように行動する。政府は、家計から一括税によって財源を徴収し、財市場で活動に必要な財・サービスを購入する。毎期の財政支出は毎期の税込と等しく (均衡財政)、また財政支出が家計の効用や将来のアウトプットに影響することはないものと仮定する。

上の仮定により、財政支出が家計の消費経路の選択に影響することはない。家計の最適な消費経路の選択は、次のようなオイラー方程式によって与えられる。

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{r - \rho - \theta g}{\theta} \quad (3)$$

ただし r は実質利子率であり、企業の利潤最大化によって、次のように与えられる。

$$r = f'(k) \quad (4)$$

ただし k は効率労働1人当たりの資本ストックであり、右辺は企業の効率労働1人当たりの生産関数 $f(k)$ の k に関する一階微分であり、資本の限界生産性を表す。

資本ストック k の時間経路は、次のように与えられる。

$$\dot{k} = f(k) - c - G - (n + g)k \quad (5)$$

ただし G は効率労働 1 人あたりの財政支出である。

マクロ経済の体系は、消費のダイナミクスを表す (3) に (4) を代入した式と資本ストックのダイナミクスを表す (5) から形成される c と k の連立微分方程式として描写される。定常均衡においては c と k がともに不変となるので、次が成り立つ。

$$r^* = \rho + \theta g \quad (6)$$

$$f'(k^*) = \rho + \theta g \quad (7)$$

$$c^* = f(k^*) - G - (n + g)k^* \quad (8)$$

アスタリスクは定常均衡を表す。

次節では経済が定常状態にあったと仮定して、予期されない財政支出の増加が経済の経路に与える影響 (第 1 節の命題 GE) について、位相図を用いた直観的な説明を敷衍することにしよう。

3. 位相図による直観的説明

財政支出の増加が起こる前の状態は、図 1 のように描かれる。

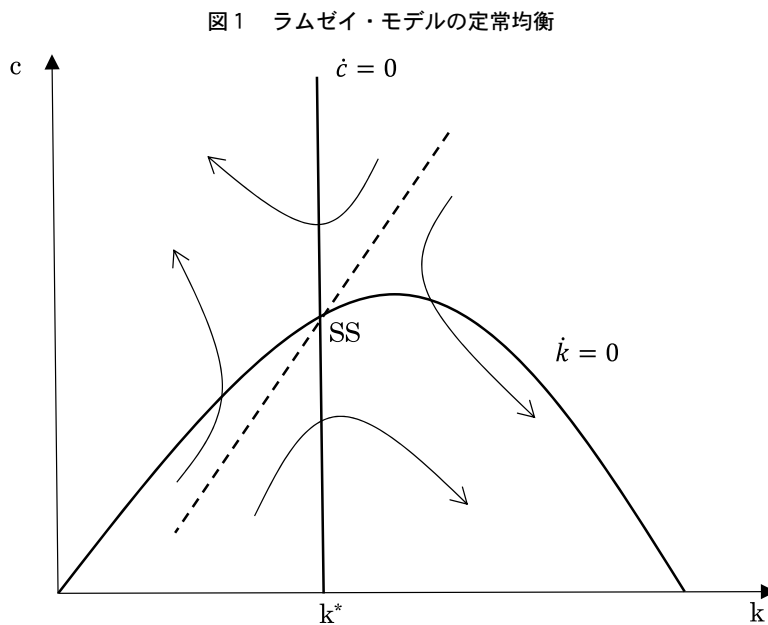
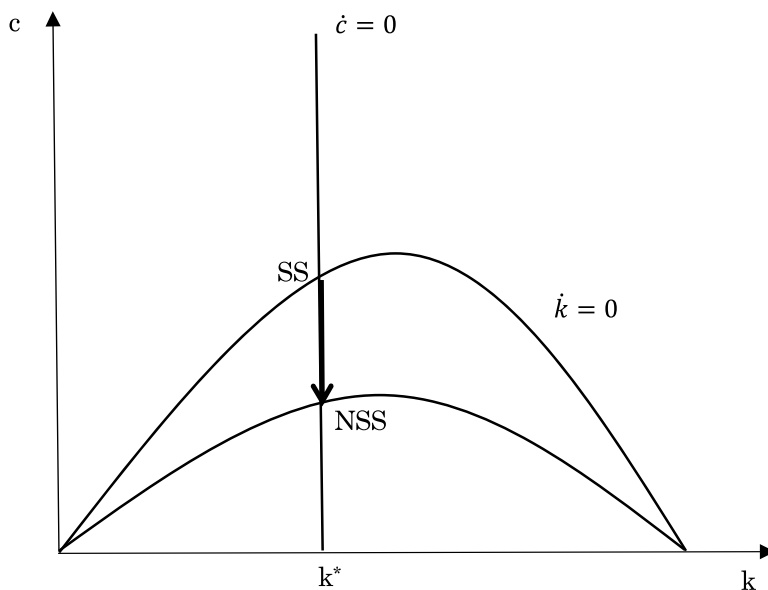


図1では、縦軸に効率労働1単位当たりの消費 c 、横軸に効率労働1単位当たりの資本 k がとられている。図中の垂直線は(7)を描いたものであり、この線上では c が不変となる。山型の曲線は(8)を描いた(ただしアスタリスクは無視)のものであり、この曲線上では k が不変となる。

よく知られているように、定常均衡SSは鞍点となり、図中に描かれた破線が唯一の収束経路である。その他の経路は、やがてオイラー方程式(3)あるいは横断面条件に抵触することになり、定常均衡SSが唯一の最適成長経路になることが示される。

はじめに経済が定常均衡にあったとして、財政支出 G の予想されない恒久的な増加があった(ある時点 t_0 において突如、財政支出の恒久的な増加がアナウンスされた)場合の体系の変化は、図2に描かれている。

図2 予想されない財政支出の恒久的な増加



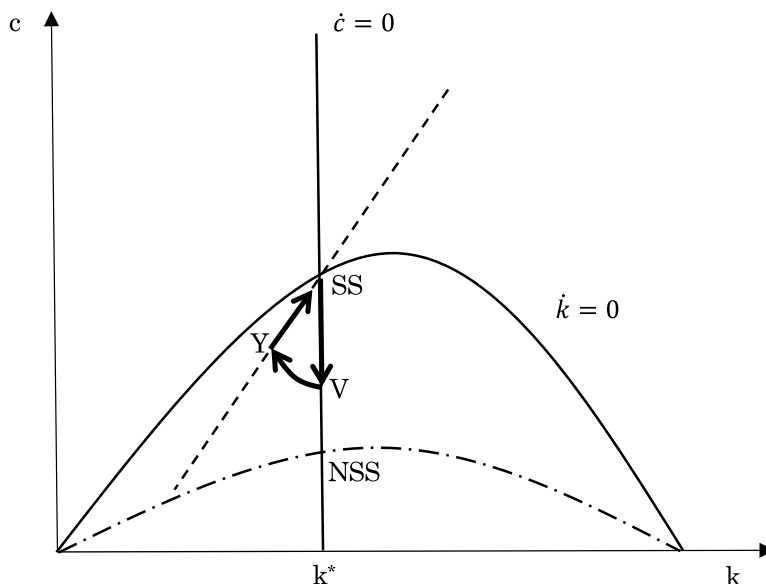
この場合、 $\dot{k} = 0$ を示す曲線が、財政支出の増加と同じだけ下方にシフトする。消費は瞬時に新しい定常均衡NSSへジャンプする。新たな定常均衡においては、消費が財政支出の増加分と同じだけ減少し、資本ストック k は変化しない。したがって実質利子率 r も(6)で与えられる水準のまま変化しない。

こうした変化の意味するところは、予想されない恒久的な財政支出の増加のあった場合には、財政支出の増加はすべて民間部門の消費の減少によりファイナンスされ、利子率の上昇による投資の減少、すなわちクラウディング・アウトが発生しない、ということである。

次に、財政支出 G の予想されない一時的な増加のあった(時点 t_0 において突如、将来の時点 t_1

まで財政支出を増加することがアナウンスされた) 場合については、図3に描かれている。

図3 予期されない財政支出の一時的な増加



この場合、 $\dot{k} = 0$ を示す曲線は、時点 t_0 において下方シフトし（図中の長鎖線）、時点 t_1 においてももどることとなる。消費者はこの情報を時点 t_0 においてあらかじめ得ているので、時点 t_0 において消費をNSSの位置にまで引き下げて、時点 t_1 においてふたたびSSの位置にジャンプする、というような消費経路の選択はなされない。最適な消費の経路は、オイラー方程式（3）を満たしているはずであるから、連続的に変化しなければならない。従って将来の時点 t_1 における消費のジャンプを前提した意思決定をするのは、合理性に反することになるのである。

選択される経路は、図3の矢印のようになる。まず時点 t_0 における消費支出 c の減少は財政支出の増加よりも少なく、経済は例えばVの位置へジャンプする。その後しばらく発散経路に乗って移動し、 $\dot{k} = 0$ を示す曲線がもとにもどる時点 t_1 において、もとの定常均衡SSへの収束経路（図中の破線）上の点Yに至る。以後は定常均衡SSに向かって収束する。実質利率 r は、時点 t_0 から時点 t_1 までは上昇し、時点 t_1 以降は次第に低下してもとの定常値へ収束する。これとは逆に資本 k は時点 t_0 から時点 t_1 までは低下し、時点 t_1 以降は次第に上昇してもとの定常値に収束する。消費 c は時点 t_0 において低下し、以後は連続的に上昇を続けてもとの定常値へ収束する。

財政支出の増加が一時的な場合には、恒久的な場合と異なり、消費支出は財政支出を打ち消すだけ減少しないので、実質利率の上昇と資本ストックの減少、すなわちクラウディング・アウトが発生する。

4. 消費・資本・利子率のダイナミックス

この節では、ラムゼイ・モデルの連立微分方程式体系を解析的に解き、前節で位相図により確認した命題GEの説明を厳密に展開する。解くべき問題の設定は次のようである。当初に経済が定常均衡にあったとして、ある時点 t_0 において予期されない財政支出の一時的な増加（将来の時点 t_1 まで財政支出を増加させること）がアナウンス・実行されたとして、その後の経済の経路を導出することである。なお、財政支出の恒久的な増加については、 $t_1 \rightarrow \infty$ とすれば議論可能である。

4-1. 連立微分方程式体系の解の導出

経済の体系は（3）に（4）を代入して得られる効率労働1単位当たりの消費 c の動き

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \theta g}{\theta} \quad (9)$$

と、効率労働1単位当たりの資本 k の動きを表す（5）により、 c と k の連立微分方程式として描写される。ここでは、財政支出 G の変化する前には経済が定常均衡にあったものとして、体系を財政支出の変化前における定常均衡の近傍で線形近似することにより、解くことを可能にする。

$$\begin{cases} (c - c^*) = \gamma(k - k^*) & (10) \\ (k - k^*) = -(c - c^*) + \beta(k - k^*) - (G - G_L) & (11) \end{cases}$$

ただし G_L は G の変化前の値である。 c^* と k^* は（7）と（8）で $G = G_L$ と置いて得られる、 c と k の定常均衡における値である。 β と γ は定数であり、次のように表される。

$$\beta = f'(k^*) - n - g = \rho - n - (1 - \theta)g > 0 \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{c^* f''(k^*)}{\theta} < 0 \quad (13)$$

係数 γ の符号については、資本の限界生産力逓減により従う。

連立微分方程式（10）（11）の一般解は、次のように与えられる（解法の詳細については、補論を参照されたい）。

$$\begin{aligned} c - c^* = & \left[h_1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds \right] e^{\mu_1 t} \\ & + \left[h_2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \right] e^{\mu_2 t} \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k - k^* = & \frac{1}{\mu_2} \left[h_1 - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds \right] e^{\mu_1 t} \\ & + \frac{1}{\mu_1} \left[h_2 + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \right] e^{\mu_2 t} \quad (15) \end{aligned}$$

ただし h_1 および h_2 は初期条件等によって決まる任意の定数、 μ_1 および μ_2 は、方程式

$$\mu^2 - \beta\mu + \gamma = 0 \quad (16)$$

の異符号の解であり、 $\mu_1 < 0 < \mu_2$ とする。

一般解 (14) と (15) を用いて経済の動きを描写するためには、定数 h_1 および h_2 を特定する必要がある。そのための条件は、解が発散しないことと時点 t_0 において資本ストックは瞬時に動かせないこと ($k(t_0) = k^*$) である。

解が発散しないためには、 μ_2 が正の数であるから、 h_2 を次のように設定する。

$$h_2 = -\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \quad (17)$$

(17) を (15) に代入し、 $t = t_0$ において (15) の左辺がゼロとなることから、 h_1 は次のようになる。

$$h_1 = \frac{\mu_2^2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} \int_{t_0}^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \int_{-\infty}^{t_0} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds \quad (18)$$

(17)、(18) を (14)、(15) へ代入することにより、次を得る。

$$\begin{aligned} c - c^* &= \frac{\mu_2^2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds \\ &\quad - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_t^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \quad (19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k - k^* &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_t^{\infty} \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \quad (20) \end{aligned}$$

財政支出 G については、時点 t_0 以前において財政支出の変化が予期されていないこと、そして時点 t_0 以後において財政支出の変化が予期されていることから、次のように定義される。

$$t < t_0 \text{ のとき} \quad G(s) = G_L \quad -\infty < s < \infty \quad (21a)$$

$$t \geq t_0 \text{ のとき} \quad G(s) = \begin{cases} G_L & -\infty < s < t_0 \\ G_H & t_0 \leq s < t_1 \\ G_L & t_1 \leq s \end{cases} \quad (21b)$$

ただし $G_L < G_H$ である。

以上に得られた解 (19) と (20) および財政支出の定義 (21) を用いて、消費と資本の経路を導出することができる。利子率については (4) を用いて資本の経路から導出できる。以下、消費、資本、利子率の順にダイナミックスを考察することにしよう。

4-2. 消費のダイナミックス

消費については、第3節に見たとおり、財政支出の増加時点で減少（下方にジャンプ）し、その後は回復する動きを示す。以下、局面を3つに分けて記述する。

① $t < t_0$ のとき

この局面では、まだ将来の財政支出の変化は予期されていない。財政支出の定義（21a）より、どの時点においても $G(s) = G_L$ であるから、消費のダイナミックスを示す（19）に代入すれば、

$$c = c^* \quad (22)$$

となることが確認できる。

② $t_0 \leq t < t_1$ のとき

この局面に入ると、将来の財政支出の変化が予期されているので、財政支出の定義（21b）を消費のダイナミックス（19）に代入すれば、

$$\begin{aligned} c - c^* &= \frac{\mu_2^2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^t (G_H - G_L) e^{-\mu_1 s} ds \\ &\quad - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_t^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) \{1 - e^{-\mu_2(t_1 - t_0)}\} e^{\mu_1(t - t_0)} \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) \{e^{\mu_1(t - t_0)} - 1\} - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) \{1 - e^{-\mu_2 t_1} e^{\mu_2 t}\} \quad (23) \end{aligned}$$

となる。(23) をさらに整頓して若干の変形を施すと、

$$c = c^* - (G_H - G_L) \{1 - M(t; t_1)\} \quad (24)$$

が得られる。ただし $M(t)$ は次のように定義される。

$$M(t; t_1) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_2(t - t_0)} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t - t_0)} \quad (25)$$

関数 $M(t)$ は、次の性質を持っている。第1に $\mu_1 < 0 < \mu_2$ であることから、 $M(t) > 0$ であることは明らかであろう。第2に $t_0 \leq t \leq t_1$ の範囲で、

$$1 - M(t; t_1) = \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} \{1 - e^{-\mu_2(t_1 - t)}\} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} \{1 - e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t - t_0)}\} > 0 \quad (26)$$

となることから、 $0 < M(t) < 1$ となることが言える。第3に（25）より、

$$\frac{\partial M(t; t_1)}{\partial t} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \{e^{\mu_2(t - t_0)} - e^{\mu_1(t - t_0)}\} \geq 0 \quad (27)$$

であるから（等号成立は $t = t_0$ のときのみ）、 $t_0 \leq t$ の範囲で $M(t)$ は時間 t に関して単調増加である。

第4に (27) より、

$$\frac{\partial^2 M(t; t_1)}{(\partial t)^2} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \{ \mu_2 e^{\mu_2(t-t_0)} - \mu_1 e^{\mu_1(t-t_0)} \} > 0 \quad (28)$$

であるから、 $M(t)$ は t に関して逓増的である。第5に (25) より、

$$\frac{\partial M(t; t_1)}{\partial t_1} = -\mu_2 M(t; t_1) < 0 \quad (29)$$

であるから、 $M(t)$ は t_1 に関して単調減少である。

関数 $M(t)$ の性質と (24) から、消費 c の動きについて次のことが言える。消費は時点 t_0 において下方にジャンプするが、低下幅は財政支出の増加分 $G_H - G_L$ よりも少ない。その後消費は時点 t_1 まで逓増的に増加する（経済はいったん発散経路に乗る）。なお、財政支出の増加の終了する時点（時点 t_1 ）が延長されるほど、消費の時間経路は下方にシフトする。

③ $t_1 \leq t$ のとき

財政支出の定義 (21b) と消費のダイナミクス (19) から、次のようになる。

$$\begin{aligned} c - c^* &= \frac{\mu_2^2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_1 s} ds \\ &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} (e^{-\mu_2 t_0} - e^{-\mu_2 t_1}) \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) e^{\mu_1 t} (e^{-\mu_1 t_0} - e^{-\mu_1 t_1}) \quad (30) \end{aligned}$$

(30) をさらに展開・整頓して若干の変形を施すと、次が得られる。

$$c = c^* + J(t; t_1) \quad (31)$$

ただし $J(t)$ は、次のように定義される。

$$J(t; t_1) = \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) e^{\mu_1(t-t_0)} \{ e^{-\mu_1(t_1-t_0)} - e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \} \quad (32)$$

関数 $J(t)$ は、次のような性質を持っている。第1に $\mu_1 < 0 < \mu_2$ であることから、 $J(t) < 0$ であることが分かる。第2に (32) より、

$$\frac{\partial J(t; t_1)}{\partial t} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) e^{\mu_1(t-t_0)} \{ e^{-\mu_1(t_1-t_0)} - e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \} > 0 \quad (33)$$

であるから、 $J(t)$ は時間 t に関して単調増加である。第3に (33) より、

$$\frac{\partial^2 J(t; t_1)}{(\partial t)^2} = \frac{\mu_1^2 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) e^{\mu_1(t-t_0)} \{ e^{-\mu_1(t_1-t_0)} - e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \} < 0 \quad (34)$$

であるから、 $J(t)$ は t に関して逓減的である。第4に時点 t_1 における関数 $J(t)$ と関数 $M(t)$ の関

係について (32) より、

$$\begin{aligned} J(t_1; t_1) &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) \{1 - e^{-(\mu_2 - \mu_1)(t_1 - t_0)}\} \\ &= -(G_H - G_L) \left\{ 1 - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} + \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{-(\mu_2 - \mu_1)(t_1 - t_0)} \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

となるから、関数 $M(t)$ の定義式 (25) より、次が言える。

$$J(t_1; t_1) = -(G_H - G_L) \{1 - M(t_1; t_1)\} \quad (36)$$

第5に、関数 $M(t)$ の時間に関する微分 (27) に注意すると、

$$\frac{\partial J(t_1; t_1)}{\partial t} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} (G_H - G_L) \{1 - e^{-(\mu_1 - \mu_2)(t_1 - t_0)}\} = (G_H - G_L) \frac{\partial M(t_1; t_1)}{\partial t} \quad (37)$$

となることが分かる。第6に (32) から直ちに、次が言える。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} J(t; t_1) = 0 \quad (38)$$

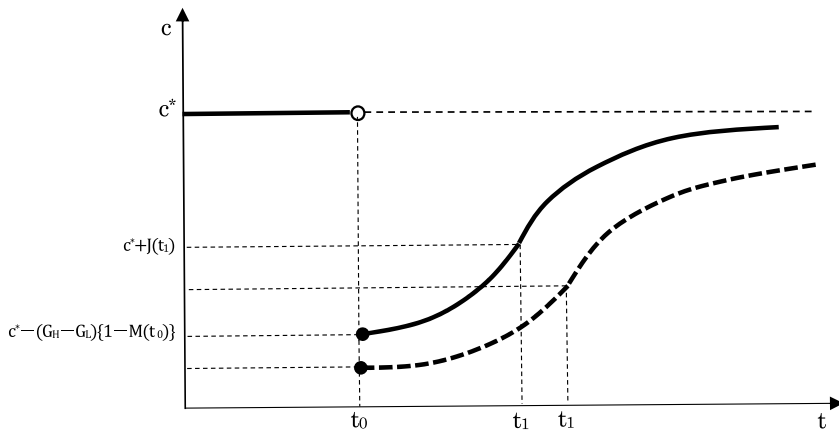
$$\frac{\partial J(t; t_1)}{\partial t_1} < 0 \quad (39)$$

となることが言える。関数 $J(t)$ は、ゼロに収束し、また t_1 に関して単調減少である。

関数 $J(t)$ の性質から、時点 t_1 以降の消費 c の動きについて、次のことが言える。(33) と (34) から、消費は増加を続けるが、その増加は逓減的になり、(38) から最終的には定常均衡 c^* に収束することが分かる。また (36) と (37) から、時点 t_1 以降の消費は時点 t_1 以前と連続的にスムーズにつながることも分かる。さらに (39) より、財政支出の増加の解除される時点 t_1 が延長されるほど、消費の時間経路は下方へシフトすることが分かる。

以上に見た消費のダイナミックスを図示すると、図4のようになる。

図4 消費のダイナミックス



図には、財政支出の増加の解除時点（時点 t_1 ）が延長された場合について、点線で示してある。この場合、上の分析で示されているように、各局面の時間経路は下方にシフトする。時点 t_0 における消費の値については（24）および（25）より、

$$c = c^* - (G_H - G_L)\{1 - e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\} \quad (40)$$

となるので、確かに t_1 の上昇によって減少することが確認できる。また時点 t_1 における消費の値については（35）より、 t_1 の上昇によって減少することが確認できる。

4-3. 資本のダイナミックス

資本ストック k については、財政支出の増加する時点 t_0 では、直ちに調整ができないので不変であるが、その後の消費の回復に伴って減少し、財政支出のもとに戻る時点 t_1 以降は、増加に転ずる。以下、3つの局面に分けて記述する。

① $t < t_0$ のとき

この局面では、財政支出の変化は予期されていないので、財政支出の定義（21a）と資本のダイナミックスを示す（20）から容易に確認できるように、資本ストックは定常値にとどまっている。

$$k = k^* \quad (41)$$

② $t_0 \leq t < t_1$ のとき

この局面では、財政支出の変化が予期されているので、財政支出の定義（21b）と（20）から、

$$\begin{aligned} k - k^* &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^t (G_H - G_L) e^{-\mu_1 s} ds \\ &\quad - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_t^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds \\ &= \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t-t_0)} \{1 - e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\} - \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} \{e^{\mu_1(t-t_0)} - 1\} \\ &\quad - \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} \{1 - e^{-\mu_2 t_1} e^{\mu_2 t}\} \quad (42) \end{aligned}$$

となる。（42）をさらに展開・整頓して若干の変形を施すと、次のようになる。

$$k = k^* + Q(t; t_1) \quad (43)$$

ただし $Q(t)$ は、次のように定義される。

$$Q(t; t_1) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \{e^{\mu_2(t-t_0)} - e^{\mu_1(t-t_0)}\} \quad (44)$$

関数 $Q(t)$ は、次のような性質を持っている。第1に $Q(t_0) = 0$ である。第2に $\mu_1 < 0 < \mu_2$ より、 $t_0 \leq t$ において $Q(t) \leq 0$ である（等号成立は $t = t_0$ のときのみ）。第3に（44）より、

$$\frac{\partial Q(t; t_1)}{\partial t} = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \{ \mu_2 e^{\mu_2(t - t_0)} - \mu_1 e^{\mu_1(t - t_0)} \} < 0 \quad (45)$$

であるから、 $t_0 \leq t$ において $Q(t)$ は単調減少である。第4に $Q(t)$ の t に関する二階微分は、次のようになる。

$$\frac{\partial^2 Q(t; t_1)}{(\partial t)^2} = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \{ \mu_2^2 e^{\mu_2(t - t_0)} - \mu_1^2 e^{\mu_1(t - t_0)} \} \quad (46)$$

μ_1 と μ_2 が方程式 (16) の解であることから、 $\mu_1 + \mu_2 = \beta$ となるから、

$$\mu_2^2 = \mu_1^2 + \beta(\mu_2 - \mu_1) \quad (47)$$

となる。(47) を (46) の中括弧のなかの μ_2^2 に代入し、 $\mu_1 < 0 < \mu_2$ と $\beta > 0$ に注意すれば、(46) の右辺の符号が負になることを容易に示すことができる。したがって $t_0 \leq t$ において $Q(t)$ は、時間とともに逓減的に減少する。第5に (44) より直ちに、

$$\frac{\partial Q(t; t_1)}{\partial t_1} = -\mu_2 Q(t; t_1) \geq 0 \quad (48)$$

となる (等号成立は $t = t_0$ のときのみ)。 $Q(t)$ は t_1 の上昇に伴って上方へシフトする。

関数 $Q(t)$ の性質と (43) から、資本ストック k の動きについて次のことが言える。資本は財政支出の増加の時点では、定常均衡値 k^* にとどまっている。その後消費の回復に伴って、資本は逓減的に減少する。なお財政支出の増加の解除時点が延長されると、資本の時間経路は、上方へシフトする。

③ $t_1 \leq t$ のとき

この局面においては、(21b) と (20) により、次のようになる。

$$\begin{aligned} k - k^* &= \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{t_0}^{t_1} (G_H - G_L) e^{-\mu_1 s} ds \\ &= \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t - t_0)} \{ 1 - e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \} - \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t - t_0)} \{ 1 - e^{-\mu_1(t_1 - t_0)} \} \end{aligned} \quad (49)$$

(49) をさらに展開・整頓すると、次が得られる。

$$k = k^* + Z(t; t_1) \quad (50)$$

ただし $Z(t)$ は、次のように定義される。

$$Z(t; t_1) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t - t_0)} \{ e^{-\mu_1(t_1 - t_0)} - e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \} \quad (51)$$

関数 $Z(t)$ は、次のような性質を持っている。第1に $\mu_1 < 0 < \mu_2$ より、 $Z(t) < 0$ である。第2に (51) から $Z(t)$ が時間 t に関して単調増加になり、しかもその増加が逓減になることは自明であろう。第3に (51) と関数 $Q(t)$ の定義 (44) から、 $Z(t_1; t_1) = Q(t_1; t_1)$ となることも容易

に確認できる。第4に (51) から、

$$\frac{\partial Z(t; t_1)}{\partial t_1} = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t-t_0)} \{-\mu_1 e^{-\mu_1(t_1-t_0)} + \mu_2 e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\} < 0 \quad (52)$$

となるから、 $Z(t)$ は t_1 に関して単調減少である。第5に (51) から直ちに、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} Z(t; t_1) = 0 \quad (53)$$

が言える。関数 $Z(t)$ はゼロに収束する。

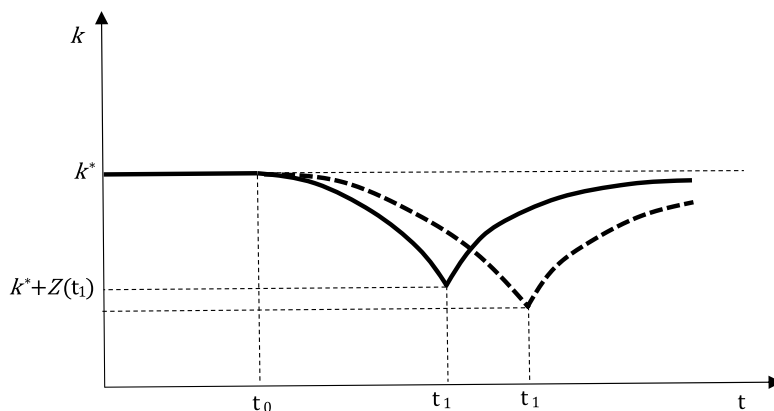
関数 $Z(t)$ の性質から、資本 k の動きは次のようになる。財政支出の増加が解除された直後より、資本 k は逡減的に増加を続け、最終的には定常均衡値 k^* に収束する。資本の時間経路は、財政支出の増加の解除時点の延長に伴い、下方へシフトする。なお、(50)、(51)、消費の経路 (31) そして関数 $J(t)$ の定義 (32) から、この局面においては、次が成り立つ。

$$c - c^* = \mu_2(k - k^*) \quad (54)$$

(54) は、第3節で見た図3 (位相図) における定常均衡への収束経路を表す式である¹⁾。すなわち、財政支出の増加の解除される時点において、それまで発散経路に乗っていた経済は、財政支出の増加前の体系における収束経路に復帰するのである。

以上に見た資本のダイナミックスを図示すると、次のようになる。

図5 資本のダイナミックス



関数 $Q(t)$ は負の傾き、関数 $Z(t)$ は正の傾きを持つので、財政支出の増加の解除される時点 t_1 において、資本 k は連続的ではあるが滑らかには変化しない。図5では、時点 t_1 の延長された場合につ

1) (54) については、連立微分方程式 (10) (11) の基本解 (補論のC5を参照されたい) において、 h_2 をゼロ、 h_1 を $c(t_1) - c^*$ とおくことにより、定常均衡への収束経路であることを容易に確認できる。

いて、点線で描かれている。この場合、関数 $Q(t)$ と関数 $Z(t)$ の性質(48と52を参照されたい)から、時点 t_1 以前の経路は上方に、時点 t_1 以降の経路は下方にシフトする。そして時点 t_1 における資本 k の値については、

$$Z(t_1; t_1) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} \{1 - e^{-(\mu_2 - \mu_1)(t_1 - t_0)}\} \quad (55)$$

となることから、時点 t_1 の延長に伴って減少することが分かる。

4-4. 利子率のダイナミクス

利子率については、(4)を財政支出の変化前(時点 t_0 以前)における定常均衡の近傍で線形近似すると、次のようになる。

$$r - r^* = \delta(k - k^*) \quad (56)$$

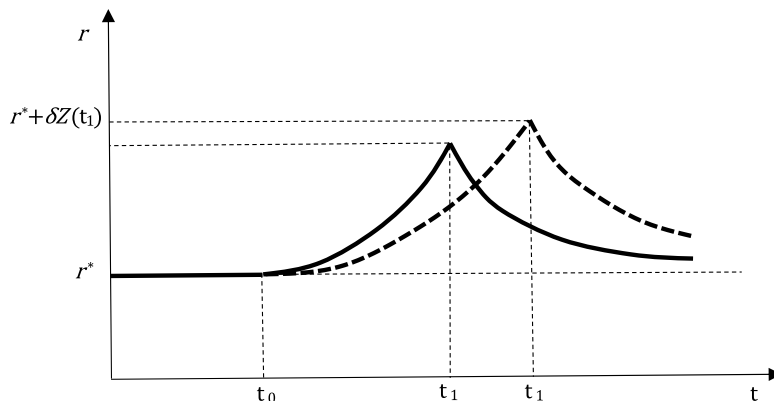
ただし r^* は(6)で定義される利子率の定常値であり、 δ は次のように定義される。

$$\delta = f''(k^*) < 0 \quad (57)$$

(56)から利子率の動きは、資本の動きとちょうど反対になることが分かる。すなわち一時的な財政支出の増加の場合、時点 t_0 から時点 t_1 までは、消費の増加に伴って財市場に超過需要が発生するため、利子率は上昇を続け、資本ストックは減少を続ける。時点 t_1 以降は、財政支出の減少により財市場は超過供給となり、利子率は低下を続け、資本は増加を続ける。

以上の利子率のダイナミクスを図示すると図6のようになる。

図6 利子率のダイナミクス



財政支出の増加の解除時点 t_1 の延長された場合については、関数 $Q(t)$ と関数 $Z(t)$ の性質(48)と(52)から、資本の場合とは逆に、時点 t_1 以前の経路が下方にシフトし、時点 t_1 以降の経路が上方

にシフトする。利率のピークは (55) から、より高くなることが分かる。

4-5. 財政支出の増加が恒常的な場合

財政支出の増加が恒常的な場合は、4-1項および4-2項の②において $t_1 \rightarrow \infty$ と置けばよい。消費については (25) より、

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} M(t; t_1) = 0 \quad (58)$$

が言えるから、(24) より、

$$c = c^* - (G_H - G_L) \quad (59)$$

となる。消費は財政支出の増加される時点 (t_0) において、瞬時に財政支出の増加と同じだけ減少する。

資本については (44) より、

$$\lim_{t_1 \rightarrow \infty} Q(t; t_1) = 0 \quad (60)$$

が言えるから、(43) より、

$$k = k^* \quad (61)$$

となり、資本は不変である。利率も不変であることは言うまでもない。財政支出の増加が恒常的な場合には、消費が速やかに財政支出と同じだけ減少するので、財市場に超過需要の発生することとはなく、利率は変わらず、クラウディング・アウトは発生しない。

最後に時点 t_1 が延長された場合のダイナミクスへの影響に触れておこう。図4と図5から分かるように、時点 t_1 が延長された場合には、財政支出の増加する時点 t_0 における消費の減少はより大きくなり、また時点 t_1 における消費と資本ストックはより低くなる。このことは、図3の位相図で、点Vが $\dot{c} = 0$ 線に沿ってより下方に移動し、また点Yが定常均衡SSへの収束経路に沿って、SSからより遠いところへ移動することを意味している。

財政支出の増加する期間が有限である場合には、期間が延長されればされるほど、クラウディング・アウトが強まる。いっぽう先に見たように、財政支出の増加する期間が無限であればクラウディング・アウトは発生しない。したがって資本蓄積への影響をできるだけ抑えたければ、財政支出の増加期間をできるだけ短くするか、そうでなければ恒久的にするか、どちらかにすべきであると言える。

5. 結論

本論では、ラムゼイ・モデルにおいて予期されない財政政策の経済に与える影響について、位相図による直観的な分析によって議論されていた命題GEを、モデルの連立微分方程式体系を解析的に解くことによって厳密に検証した。

本論では予期されない財政政策について分析するにとどまったが、さらに進んで予期された財政政策の効果についても議論可能である。予期された恒久的な財政支出の増加については、本論における設定では、将来の増税を伴っているのので、将来の消費水準が低下することを消費者はあらかじめ知っていることになる。したがって合理的な消費者は、財政支出の実際に増加する前から消費水準を漸進的に減らし始めるのである。このため財市場に超過供給が発生し、実質利子率が低下して資本蓄積が促進されることになる。財政支出の増加が実行されると、財市場に超過需要が発生し、利子率が上昇し始め、資本ストックはもとの定常状態の水準に戻ることになる。

財政支出の増加が一時的な場合には、財政支出の増加される時点までの動きは財政支出の増加が恒久的な場合と同様である（すなわち消費の減少と資本の増加が発生する）が、消費の減少は財政支出の増加が恒久的な場合よりも抑えられるため、財政支出の増加の実行後における財市場の超過需要がより大きく、利子率もより大きく上昇し、資本は一時的に定常状態の水準を下回り、財政支出の増加の解除されるまで低下し続ける。

以上要するにラムゼイ・モデルにおいては、予期された財政支出の増加が短期的に資本蓄積を促進して1人当たり産出量をトレンド線よりも上昇させるのである。このことは静学的な新古典派マクロ・モデルに見られるクラウディング・アウトのイメージを全く覆すことであると言える。詳細については、論文を改めて分析しようと思う。

(補論) 一般解の導出の詳細について

この補論では、連立微分方程式 (10) (11) の一般解 (15) (16) の導出について説明する。解き方はいくつかあるが、ここでは最も一般的な定数変化法とより簡便な記号法を用いた解き方について説明する²⁾。

体系 (10) (11) を行列表記すると、次のようになる。

$$\dot{X} = AX + B \quad (C1)$$

ただし、

$$X = \begin{bmatrix} c(t) - c^* \\ k(t) - k^* \end{bmatrix}, A = \begin{bmatrix} 0 & \gamma \\ -1 & \beta \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ -\{G(t) - G_L\} \end{bmatrix}$$

である。微分方程式 (C1) の一般的な解は、行列Bを無視した同次方程式の解 (基本解) と (C1) をみたすある解 (特殊解) の和としてあらわされる。上に述べた定数変化法も記号法も特殊解の見つけ方に関する方法である。

まず基本解を求める。行列Aの固有値を μ とすれば、 μ は次をみたす。

$$\mu^2 - \beta\mu + \gamma = 0 \quad (C2)$$

方程式 (C2) は異符号のふたつの解をもつ。それぞれを μ_1 、 μ_2 とする ($\mu_1 < 0 < \mu_2$)。 μ_1 、 μ_2 は次をみたす。

$$\mu_1 + \mu_2 = \beta, \quad \mu_1\mu_2 = \gamma \quad (C3)$$

固有値に対応する固有ベクトルを次のように表せる。

$$\begin{bmatrix} h_1 \\ h_1/\mu_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} h_2 \\ h_2/\mu_1 \end{bmatrix} \quad (C4)$$

ただし h_1 と h_2 は本文中と同様、任意の定数である。固有値と固有ベクトルを用いて、基本解 X_p は次のようになる。

$$X_p = h_1 \begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} \\ e^{\mu_1 t}/\mu_2 \end{bmatrix} + h_2 \begin{bmatrix} e^{\mu_2 t} \\ e^{\mu_2 t}/\mu_1 \end{bmatrix} \quad (C5)$$

定数変化法は一種の未定係数法であり、基本解から特殊解の型を類推し、もとの方程式 (C1) をみたすように係数の値を決める方法である。この場合は、基本解 (C5) から特殊解 X_0 を次のように設定すればよい。

2) 微分方程式の解説書は多数あるが、ここではコンパクトに解き方を説明しているものとして田辺・藤原 [1981; 第1～3章] を挙げておく。なお本文では、この補論で説明する一般解から、さらに定常均衡への収束解を導出しているのが、このステップについては、基本的に河合 [1986; 第6章] の方法を参照している。河合 [1986; 第6章] は、ドーンブッシュのオーバーシュート・モデルを連立微分方程式の体系として定式化して解を導出し、いくつかの場合についてダイナミックスを論じている。

$$X_0 = W_1(t) \begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} \\ e^{\mu_1 t} / \mu_2 \end{bmatrix} + W_2(t) \begin{bmatrix} e^{\mu_2 t} \\ e^{\mu_2 t} / \mu_1 \end{bmatrix} \quad (C6)$$

ただし W_1 と W_2 は、時間の関数として設定された係数である。特殊解 (C6) を (C1) へ代入して整頓すれば、次が得られる。

$$\begin{bmatrix} e^{\mu_1 t} & e^{\mu_2 t} \\ e^{\mu_1 t} / \mu_2 & e^{\mu_2 t} / \mu_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\{G(t) - G_L\} \end{bmatrix} \quad (C7)$$

(C7) の左辺における 2×2 行列 (基本行列) の逆行列を両辺の左からかけると、

$$\begin{bmatrix} \dot{W}_1 \\ \dot{W}_2 \end{bmatrix} = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \begin{bmatrix} \{G(t) - G_L\} e^{-\mu_1 t} \\ -\{G(t) - G_L\} e^{-\mu_2 t} \end{bmatrix} \quad (C8)$$

となる。(C8) より、係数 W_1 と W_2 が次のように求まる。

$$W_1 = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds, \quad W_2 = -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \quad (C9)$$

係数 (C9) を (C6) に代入すれば、特殊解 X_0 が次のように求まる。

$$X_0 = \begin{bmatrix} \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_1 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds - \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_2 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \\ \frac{\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_1 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds - \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} e^{\mu_2 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \end{bmatrix} \quad (C10)$$

基本解 (C5) と特殊解 (C10) の和に若干の調整を施せば、本文中に掲げられている一般解 (14) (15) が得られる (14が一般解 $X = X_p + X_0$ の行列の 1 行目、15が 2 行目となる)。

次に記号法を用いた解法について説明する。記号法は差分方程式のラグ・オペレーターに似た手法による解法である。微分方程式の特殊解を見つけるだけであれば、記号法の方が早いことが多いため、よく使われている方法である。

記号 D を時間に関する微分 d/dt とすれば (C1) を、

$$DX = AX + B \quad (C11)$$

と表記できる。(C11) より X を次のように解くことができる。

$$X = (D1 - A)^{-1} B \quad (C12)$$

ただし 1 は単位行列を表す。(C12) の右辺は具体的には次のようになる。

$$\frac{1}{D^2 - \beta D + \gamma} \begin{bmatrix} D - \beta & \gamma \\ -1 & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -\{G(t) - G_L\} \end{bmatrix} = \frac{1}{(D - \mu_1)(D - \mu_2)} \begin{bmatrix} -\gamma\{G(t) - G_L\} \\ -D\{G(t) - G_L\} \end{bmatrix} \quad (C13)$$

(C13) の右辺はさらに次のように書き換えることができる。

$$\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} \left(\frac{1}{D - \mu_1} - \frac{1}{D - \mu_2} \right) \begin{bmatrix} -\gamma\{G(t) - G_L\} \\ -D\{G(t) - G_L\} \end{bmatrix} \quad (C14)$$

(C14) に (C3) を代入し、さらに記号法の公式

$$\frac{1}{D-\alpha} f(t) = e^{\alpha t} \int e^{-\alpha s} f(s) ds \quad (C15)$$

を用いれば、特殊解 X_0 を次のように導出することができる。

$$X_0 = \begin{bmatrix} -\frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds + \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \\ -\frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1 t} \int_{-\infty}^t D\{G(s) - G_L\} e^{-\mu_1 s} ds + \frac{1}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_{-\infty}^t D\{G(s) - G_L\} e^{-\mu_2 s} ds \end{bmatrix} \quad (C16)$$

(C16) の 1 行目 (消費 c の特殊解) が、定数変化法で求めた特殊解 (C10) と一致していることは、直ちに確認できる。(C16) の 2 行目 (資本 k の特殊解) の積分の中身は、部分積分の公式を用いると、

$$\int_{-\infty}^t D\{G(s) - G_L\} e^{-\mu_i s} ds = [\{G(s) - G_L\} e^{-\mu_i s}]_{-\infty}^t + \mu_i \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_i s} ds \quad (C17)$$

となる ($i = 1, 2$)。本文 (21) の財政支出の定義から、初期状態において財政支出が G_L であることが想定されているので、

$$\lim_{s \rightarrow -\infty} G(s) = G_L \quad (C18)$$

と言えるから、(C17) の右辺はさらに、

$$\{G(s) - G_L\} e^{-\mu_i t} + \mu_i \int_{-\infty}^t \{G(s) - G_L\} e^{-\mu_i s} ds \quad i = 1, 2 \quad (C19)$$

となる。(C19) を (C16) に代入すれば、定数変化法の特解 (C10) の 2 行目と一致していることを確認できる。本文中の一般的な解 (14) (15) が基本解 (C5) と特殊解の和によって与えられることは、先ほどと同様である。

参考文献

河合正弘 [1986] 『国際金融と開放マクロ経済学』、東洋経済新報社。

田辺行人・藤原毅夫 [1981] 『常微分方程式』、東京大学出版会。

Barro, Robert, J. [1987] "Government Spending, Interest rates, Prices, and Budget Deficits in the United Kingdom. 1701–1918", *Journal of Monetary Economics* 20 (September) pp.221-247.

Ljungqvist, Lars and Sargent, Thomas, J. [2018] *Recursive Macroeconomic Theory Fourth Edition*. The MIT Press.

Romer, David. [2012] *Advanced Macro Economics Fourth Edition*. McGraw-Hill.