

収穫分配ゲームにおける過剰生産と過少生産

升 田 猛

- 1 はじめに
 - 2 収穫分配ゲーム
 - 3 非正の外部性と過剰生産
 - 4 非負の外部性と過少生産
 - 5 結論と今後の研究課題
- 参考文献

1 はじめに

共有地において、魚介類などの水産資源が、乱獲により急速に減少することがある。共有地の資源は、誰でも自由に利用でき、利用者間で競合がおこる。各々の経済主体が、他の経済主体の利益を考慮せず、自らの利益のみを追求すれば、共有地の資源は、過剰に利用される。

Moulin and Watts (1997) に従い、上記のように、投入物を生産物に変換する生産技術が共同所有される生産経済を収穫分配ゲーム (*surplus sharing game*) として定義する。各個人が、独立かつ同時に投入量を決定し、生産技術からの収穫は、各個人の投入量に依存して分配される。

この論文では、非正の外部性（非負の外部性）が存在する収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、それをパレート改善する状態より、過剰生産（過少生産）が生じることを示す。Moulin and Watts (1997) は、収穫分配ゲームにおいて、各個人にとって、投入物と生産物がともに正常財であるという仮定のもとで、過剰生産（過少生産）が生じることを示した。この論文では、投入物と生産物がともに正常財である必要はないが、非正の外部性（非負の外部性）が存在すると仮定し、外部性に関して彼らより強い仮定をおく。

Watts (1996) は、生産技術からの収穫が、各個人の投入量に比例して分配される（非正の外部性が存在する）とき、各個人にとって、投入物と生産物がともに正常財ならば、ナッシュ均衡は一意であることを示した。Watts (2002) が示すように、投入物と生産物がともに正常財であると仮定しても、生産技術からの収穫が、各個人の投入量に依存して分配されるならば（Moulin and Watts (1997) による外部性に関する弱い仮定のもとで）、収穫分配ゲームのナッシュ均衡は一意で

あるとは限らない。

これ以降の論文の構成は以下の通りである。2章で、収穫分配ゲームを定義し、非正の外部性について説明する。3章で、非正の外部性が存在する収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、それをパレート改善する状態と比べて、過剰生産になることを示す。4章で、非負の外部性が存在する収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、過少生産が生じることを明らかにする。5章で、結論と今後の研究課題について述べる。

2 収穫分配ゲーム

この章では、共同所有する生産技術からの収穫が、各個人の投入量に依存して分配される状況について考察する。そのような状況を収穫分配ゲームとして定義し、非正の外部性が存在する収穫分配ゲームについて説明する。

一種類の投入物から一種類の生産物が生産される生産経済を考えよう。 n 人の経済主体の有限集合を $N = \{1, \dots, n\}$ とおく。ここで、 $n \geq 2$ である。各々の経済主体 $i \in N$ は非負の投入量 $x_i \in \mathbb{R}_+$ を選択する。ここで、 \mathbb{R}_+ は非負の実数の集合である。総投入量 $\sum_{i \in N} x_i$ を x_N と表記する。総投入量 $x_N \in \mathbb{R}_+$ を総生産量 $y_N \in \mathbb{R}_+$ に変換する生産技術 $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ は共同所有され、総生産量 y_N は各個人へ分配され、各個人は生産量 $y_i \in \mathbb{R}_+$ を受け取る。 $\sum_{i \in N} y_i = y_N = f(x_N)$ である。投入量の組 $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、各個人 $i \in N$ の生産量 $y_i \in \mathbb{R}_+$ を決定するルール $\varphi_i: \mathbb{R}_+^n \rightarrow \mathbb{R}_+$ を分配ルールと呼ぶ。分配ルール φ_i に以下の4つの仮定をおく。

仮定1 任意の $i \in N$ と任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $x_i = 0$ ならば、 $\varphi_i(x) = 0$ である。

仮定2 任意の $i \in N$ に対して、分配ルール φ_i は、投入量 x_i に関して、連続、狭義に増加、狭義に凹である。

仮定1より、任意の $i \in N$ と任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = 0$ ならば、 $\varphi_i(x) = f(x_i)$ である。仮定2より、生産技術 f は、連続、狭義に増加、狭義に凹である。

仮定3 任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ と任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 i と異なる任意の $j \in N$ に対して、 $\varphi_j(x) \geq \varphi_j(a)$ である。

仮定3は、非正の生産外部性が存在することを意味する。すなわち、プレイヤー i が単独で投入量を x_i から a_i に増加させると、プレイヤー $j \neq i$ に分配される生産量は、 $\varphi_j(x)$ から $\varphi_j(a)$ に増加し

ない。このとき、 $\sum_{j \neq i} \varphi_j(x) \geq \sum_{j \neq i} \varphi_j(a)$ が成り立つから、 $f(x_N) - \varphi_i(x) \geq f(a_N) - \varphi_i(a)$ である。よって、任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ と任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 $\varphi_i(a) - \varphi_i(x) \geq f(a_N) - f(x_N)$ が成り立つ。仮定 2 より、分配ルール φ_i は投入量 x_i に関して狭義に増加し、生産技術 f は総投入量 x_N に関して狭義に増加するから、プレイヤー i が単独で投入量を x_i から a_i に増加させるとき、プレイヤー i に分配される生産量の増加分 $\varphi_i(a) - \varphi_i(x)$ は総生産量の増加分 $f(a_N) - f(x_N)$ 以上である。換言すれば、プレイヤー i が単独で投入量を a_i から x_i に減少させるとき、プレイヤー i に分配される生産量の減少分 $\varphi_i(a) - \varphi_i(x)$ は総生産量の減少分 $f(a_N) - f(x_N)$ 以上である。

仮定 4 任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ 、任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ 、任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = a_i$ かつ $\sum_{j \neq i} x_j = \sum_{j \neq i} a_j$ ならば、 $\varphi_i(x) = \varphi_i(a)$ である。

仮定 4 のもとで、プレイヤー i が投入量 x_i を変更しないときに、プレイヤー i を除く他のプレイヤー j が投入量 x_j を変更しても、プレイヤー i 以外のすべてのプレイヤー j の総投入量 $\sum_{j \neq i} x_j$ が変化しなければ、プレイヤー i に分配される生産量 $\varphi_i(x)$ は変化しない。

Moulin and Watts (1997) は、分配ルール φ_i に関して、仮定 1 と仮定 2 をおき、さらに、任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ と任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 $\varphi_i(a) - \varphi_i(x) \geq f(a_N) - f(x_N)$ であることを仮定し、仮定 3 と仮定 4 をおいていない。このとき、任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ と任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 i と異なる $j \in N$ が存在して、 $\varphi_j(x) \geq \varphi_j(a)$ である。すなわち、プレイヤー i が単独で投入量を x_i から a_i に増加させるとき、分配される生産量が $\varphi_j(x)$ から $\varphi_j(a)$ に増加しないプレイヤー $j \neq i$ が存在する。仮定 3 と異なり、分配される生産量が $\varphi_j(x)$ から $\varphi_j(a)$ に増加するプレイヤー $j \neq i$ が存在する可能性がある。Moulin and Watts (1997) は、生産外部性に関して我々より弱い仮定をおいている。

仮定 1、仮定 2、仮定 3、仮定 4 を満たす分配ルール φ_i の例として、収穫が投入量に比例して分配される場合、 $\varphi_i(x) = (x_i/x_N)f(x_N)$ を考えればよい。

投入量と生産量の組 $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}_+^2$ に関して、各個人の選好は、投入量 x_i に関して非増加、生産量 y_i に関して非減少、凸、局所非飽和、連続である。これ以降の記述を簡潔にするために、各個人の選好を効用関数 $u_i: \mathbb{R}_+^2 \rightarrow \mathbb{R}$ により表現する。ここで、 \mathbb{R} は実数の集合である。また、任意の $i \in N$ に対して、効用関数 u_i を $u_i(0,0) = 0$ になるように単調変換する。

以上の生産経済を戦略形ゲーム $\Gamma = \{N, (X_i)_{i \in N}, (g_i)_{i \in N}\}$ として定義しよう。ここで、プレイヤー集合 N は、 n 人の経済主体の有限集合 $\{1, \dots, n\}$ 、各プレイヤー $i \in N$ の戦略集合 X_i は、非

負の投入量の集合 $\{x_i | x_i \in \mathbb{R}_+\}$ 、各プレイヤー $i \in N$ の利得関数 g_i は、戦略プロファイルの集合 $X = \times_{i \in N} X_i$ 上に定義された実数値関数 $g_i: X \rightarrow \mathbb{R}$ である。任意の $i \in N$ と任意の $(x_1, \dots, x_n) \in X$ に対して、 $g_i(x_1, \dots, x_n) = u_i(x_i, \varphi_i(x_1, \dots, x_n))$ である。Moulin and Watts (1997) に従い、戦略形ゲーム Γ を収穫分配ゲームと呼ぶ。

分配ルール φ_i が上記の仮定 3（非正の生産外部性）を満たすならば、収穫分配ゲーム Γ において、プレイヤー i が単独で投入量を x_i から a_i に増加させるとき、プレイヤー $j \neq i$ に分配される生産量は、 $y_j = \varphi_j(x)$ から $b_j = \varphi_j(a)$ に増加することはない。 $x_j = a_j$ 、 $y_j \geq b_j$ かつ、効用関数 u_j は生産量 y_j に関して非減少であるから、 $u_j(x_j, y_j) \geq u_j(a_j, b_j)$ が成り立ち、プレイヤー $j \neq i$ の利得は増加しない。ただし、プレイヤー $j \neq i$ の投入量 x_j が 0 ならば、仮定 1 より、 $x_j = a_j = 0$ かつ $y_j = \varphi_j(x) = 0 = \varphi_j(a) = b_j$ であるから、 $u_j(x_j, y_j) = 0 = u_j(a_j, b_j)$ が成り立ち、プレイヤー $j \neq i$ の利得は変化しない。以上より、プレイヤー i が単独で投入量を増加（減少）させるとき、他のすべてのプレイヤー $j \neq i$ の利得は増加（減少）しない。このとき、収穫分配ゲーム Γ において、非正の外部性が存在するという。

非正の外部性：任意の $x \in X$ と任意の $a \in X$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 i と異なる任意の $j \in N$ に対して、 $u_j(x_j, y_j) \geq u_j(a_j, b_j)$ である。

3 非正の外部性と過剰生産

この章では、非正の外部性が存在する収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、それをパレート改善する状態より、過剰生産が生じることを示す。

収穫分配ゲーム Γ において、任意の $i \in N$ と任意の $(x_1, \dots, x_n) \in X$ に対して、 $g_i(x_1, \dots, x_n) = u_i(x_i, \varphi_i(x_1, \dots, x_n))$ であるから、 $x^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X$ がナッシュ均衡ならば、任意の $i \in N$ に対して、 $x_i^* = \arg \max_{x_i \in X_i} u_i(x_i, \varphi_i(x_i, x_{-i}^*))$ である。ここで、任意の $i \in N$ に対して、 $x_{-i}^* = (x_1^*, \dots, x_{i-1}^*, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \in \times_{j \in N, j \neq i} X_j$ である。 $x^* \in X$ がナッシュ均衡であるとき、任意の $i \in N$ に対して、投入量と生産量の組 $(x_i^*, y_i^*) \in \mathbb{R}_+^2$ は、制約条件 $y_i = \varphi_i(x_i, x_{-i}^*)$ 付き効用 $u_i(x_i, y_i)$ 最大化問題の解である。

前章の仮定 2 より、分配ルール φ_i は投入量 x_i に関して狭義に凹である。また、各個人の選好は凸、局所非飽和、生産量 y_i に関して非減少（あるいは、投入量 x_i に関して非増加）である。ゆえに、制約条件 $y_i = \varphi_i(x_i, x_{-i}^*)$ 付き効用 $u_i(x_i, y_i)$ 最大化問題の解は一意である。次の補題 1 が成り立つ。

補題 1 任意のナッシュ均衡 $x^* \in X$ 、任意の $i \in N$ 、任意の $x_i \in X_i$ に対して、 $x_i^* \neq x_i$ ならば、

$u_i(x_i^*, \varphi_i(x_i^*, x_{-i}^*)) > u_i(x_i, \varphi_i(x_i, x_{-i}^*))$ である。

分配ルール φ_i に関する前章の仮定4より、任意の $x \in X$ 、任意の $a \in X$ 、任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = a_i$ かつ $\varphi_i(x) = \varphi_i(a)$ ならば、 $u_i(x_i, \varphi_i(x)) = u_i(a_i, \varphi_i(a))$ であるから、任意の $x \in X$ 、任意の $a \in X$ 、任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = a_i$ かつ $\sum_{j \neq i} x_j = \sum_{j \neq i} a_j$ ならば、 $u_i(x_i, y_i) = u_i(a_i, b_i)$ である。プレイヤー i が投入量を変更しないときに、プレイヤー i を除く他のプレイヤー j が投入量 x_j 変更しても、プレイヤー i 以外のすべてのプレイヤー j の総投入量 $\sum_{j \neq i} x_j$ が変化しなければ、プレイヤー i の利得 $u_i(x_i, y_i)$ は変化しない。

分配ルール φ_i が仮定4を満足するならば、収穫分配ゲーム Γ において、次の補題2が成り立つ。

補題2 任意の $x \in X$ 、任意の $a \in X$ 、任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = a_i$ かつ $\sum_{j \neq i} x_j < \sum_{j \neq i} a_j$ ならば、 $u_i(x_i, y_i) \geq u_i(a_i, b_i)$ である。

証明 $c \in X$ が存在して、 $j \in N$ が一意に存在して、 $c_j = x_j + (\sum_{j \neq i} a_j - \sum_{j \neq i} x_j)$ であり、任意の $i \neq j$ に対して、 $c_i = x_i$ である。 $c_j > x_j$ であるから、非正の外部性の性質より、任意の $i \neq j$ に対して、 $u_i(x_i, y_i) \geq u_i(c_i, d_i)$ である。 $c_i = x_i = a_i$ かつ $\sum_{j \neq i} c_j = \sum_{j \neq i} x_j + (\sum_{j \neq i} a_j - \sum_{j \neq i} x_j) = \sum_{j \neq i} a_j$ であるから、分配ルールに関する仮定4より、 $\varphi_i(c) = \varphi_i(a)$ である。よって、 $u_i(c_i, d_i) = u_i(c_i, \varphi_i(c)) = u_i(a_i, \varphi_i(a)) = u_i(a_i, b_i)$ である。ゆえに、 $u_i(x_i, y_i) \geq u_i(a_i, b_i)$ が成り立つ。(証明終)

プレイヤー i が投入量を変更しないときに、プレイヤー i を除く他のすべてのプレイヤー j の総投入量 $\sum_{j \neq i} x_j$ が増加(減少)すれば、プレイヤー i の利得は増加(減少)しない。

非正の外部性が存在する収穫分配ゲーム Γ のナッシュ均衡 $x^* \in X$ において、それをパレート改善する状態と比較して、過剰生産になる。次の定理1が成立する。

定理1 収穫分配ゲーム Γ において、非正の外部性が存在する。このとき、任意の $x \in X$ と任意のナッシュ均衡 $x^* \in X$ に対して、 x が x^* をパレート改善するならば、 $f(x_N) < f(x_N^*)$ が成り立つ。

証明 任意の $x \in X$ と任意のナッシュ均衡 $x^* \in X$ に対して、 $x_N \geq x_N^*$ ならば、 x は x^* をパレート改善しないことを示す。

$i \in N$ が存在して、 $x_i < x_i^*$ である場合を考えよう。このとき、 $\sum_{j \neq i} x_j > \sum_{j \neq i} x_j^*$ である。 $a \in X$ が存在して、 $i \in N$ が一意に存在して、 $a_i = x_i$ であり、任意の $j \neq i$ に対して、

$a_j = x_j^*$ である。 x^* はナッシュ均衡であるから、補題1より、 $u_i(x_i^*, y_i^*) > u_i(a_i, b_i)$ が成り立つ。 $c \in X$ が存在して、 $j \in N$ が一意に存在して、 $c_j = a_j + (\sum_{j \neq i} x_j - \sum_{j \neq i} x_j^*)$ であり、任意の $i \neq j$ に対して、 $c_i = a_i$ である。 $c_j > a_j$ かつ $c_i = a_i$ であるから、非正の外部性の性質より、 $u_i(a_i, b_i) \geq u_i(c_i, d_i)$ である。 $\sum_{j \neq i} c_j = \sum_{j \neq i} a_j + (\sum_{j \neq i} x_j - \sum_{j \neq i} x_j^*)$ である。 $\sum_{j \neq i} a_j = \sum_{j \neq i} x_j^*$ より、 $\sum_{j \neq i} c_j = \sum_{j \neq i} x_j$ である。 $c_i = x_i$ であるから、分配ルールに関する仮定4より、 $\varphi_i(c) = \varphi_i(x)$ である。 $u_i(c_i, d_i) = u_i(c_i, \varphi_i(c)) = u_i(x_i, \varphi_i(x)) = u_i(x_i, y_i)$ である。ゆえに、 $i \in N$ が存在して、 $u_i(x_i^*, y_i^*) > u_i(x_i, y_i)$ であるから、 x は x^* をパレート改善できない。

任意の $i \in N$ に対して、 $x_i \geq x_i^*$ である場合を考えよう。任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = x_i^*$ ならば、 x は x^* をパレート改善できないから、 $i \in N$ が存在して、 $x_i > x_i^*$ であるとしよう。 $x_i > x_i^*$ であるプレイヤーの数を K とおく。 $1 \leq K \leq n$ である。プレイヤーの点列 $\{i^1, i^2, \dots, i^K\}$ と戦略プロファイルの点列 $\{z^0, z^1, z^2, \dots, z^K\}$ を以下の4つの条件を満たすようにとる。(i) 任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $x_{i^k} > x_{i^k}^*$ である。(ii) i^1, i^2, \dots, i^K はすべて異なる。(iii) $z^0 = x^*$ かつ $z^K = x$ である。(iv) 任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $z_{i^k}^k = z_{i^k}^K$ かつ任意の $j \neq i^k$ に対して $z_j^k = z_j^{k-1}$ である。

任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $u_{i^k}(x^*) = u_{i^k}(z^0) \geq u_{i^k}(z^K) = u_{i^k}(x)$ であることを示す。 $K = 1$ ならば、ナッシュ均衡の定義より明らかに成り立つから、 $2 \leq K \leq n$ とする。 $k = 1$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、プレイヤー i^1 が単独で戦略を $x_{i^1}^*$ から $z_{i^1}^1$ に変更すれば、 $u_{i^1}(z^0) \geq u_{i^1}(z^1)$ である。任意の $l = 2, \dots, K$ に対して、 $z_{i^1}^1 = x_{i^1}^* < x_{i^1} = z_{i^1}^K$ かつ、任意の $j \neq l$ に対して、 $z_j^1 = z_j^K$ である。 $\sum_{j \neq i^1} z_j^1 < \sum_{j \neq i^1} z_j^K$ であるから、補題2より、 $u_{i^1}(z^1) \geq u_{i^1}(z^K)$ である。 $k = 2, \dots, K-1$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、プレイヤー i^k が単独で戦略を $x_{i^k}^*$ から $z_{i^k}^k$ に変更すれば、 $u_{i^k}(z^0) \geq u_{i^k}(z_{i^k}^k, x_{-i^k}^*)$ が成り立つ。 $w^k = (z_{i^k}^k, x_{-i^k}^*)$ とおく。任意の $l = 1, \dots, k-1$ に対して $w_{i^l}^k = x_{i^l}^* < x_{i^l} = z_{i^l}^K$ かつ、任意の $j \neq l$ に対して $w_j^k = z_j^K$ であるから、補題2より、 $u_{i^k}(w^k) \geq u_{i^k}(z^K)$ である。任意の $l = k+1, \dots, K$ に対して、 $z_{i^l}^k = x_{i^l}^* < x_{i^l} = z_{i^l}^K$ かつ、任意の $j \neq l$ に対して、 $z_j^k = z_j^K$ である。 $\sum_{j \neq i^k} z_j^k < \sum_{j \neq i^k} z_j^K$ から、補題2より、 $u_{i^k}(z^k) \geq u_{i^k}(z^K)$ である。 $k = K$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、プレイヤー i^K が単独で戦略を $x_{i^K}^*$ から $z_{i^K}^K$ に変更すれば、 $u_{i^K}(z^0) \geq u_{i^K}(z_{i^K}^K, x_{-i^K}^*)$ が成り立つ。 $w^K = (z_{i^K}^K, x_{-i^K}^*)$ とおく。任意の $l = 1, \dots, K-1$ に対して $w_{i^l}^K = x_{i^l}^* < x_{i^l} = z_{i^l}^K$ かつ、任意の $j \neq l$ に対して $w_j^K = z_j^K$ であるから、補題2より、 $u_{i^K}(w^K) \geq u_{i^K}(z^K)$ である。

任意の $j \neq k$ に対して、 $z_j^0 = z_j^K$ である。 $\sum_{k=1}^K z_k^0 < \sum_{k=1}^K z_k^K$ であるから、任意の $j \neq k$ に対して、 $\sum_{i \neq j} z_i^0 < \sum_{i \neq j} z_i^K$ である。補題2より、任意の $j \neq k$ に対して、 $u_j(x^*) = u_j(z^0) \geq u_j(z^K) = u_j(x)$ である。よって、任意の $i \in N$ に対して、 $u_i(x^*) \geq u_i(x)$ が成り立つ。ゆえに、 x は x^* をパレート改善できない。(証明終)

4 非負の外部性と過少生産

この章では、非負の外部性が存在する収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、それをパレート改善する状態と比べて、過少生産になることを示す。2章の収穫分配ゲームにおいて、分配ルール φ_i に関する仮定3を次の仮定3*にかえ、前章の定理1の証明を少し変更すればよい。

仮定3* 任意の $x \in \mathbb{R}_+^n$ 、任意の $a \in \mathbb{R}_+^n$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 i と異なる任意の $j \in N$ に対して、 $\varphi_j(x) \leq \varphi_j(a)$ である。

仮定3*は、非負の生産外部性が存在することを意味し、プレイヤー i が単独で投入量を x_i から a_i に増加させるとき、プレイヤー $j \neq i$ に分配される生産量は、 $\varphi_j(x)$ から $\varphi_j(a)$ に減少しない。

仮定1、仮定2、仮定3*、仮定4を満たす分配ルール φ_i の例として、収穫が投入量に依存せず等しく分配される場合、 $\varphi_i(x) = f(x_N)/n$ を考えればよい。

分配ルール φ_i が仮定3*を満たすとき、プレイヤー i が単独で投入量を増加（減少）させるとき、他のすべてのプレイヤー $j \neq i$ の利得は減少（増加）しない。このとき、収穫分配ゲーム Γ において、非負の外部性が存在するという。

非負の外部性：任意の $x \in X$ 、任意の $a \in X$ に対して、 $i \in N$ が一意に存在して $x_i < a_i$ かつ i と異なる任意の $j \in N$ に対して $x_j = a_j$ ならば、 i と異なる任意の $j \in N$ に対して、 $u_j(x_j, y_j) \leq u_j(a_j, b_j)$ である。

定理2 収穫分配ゲーム Γ において、非負の外部性が存在する。このとき、任意の $x \in X$ と任意のナッシュ均衡 $x^* \in X$ に対して、 x が x^* をパレート改善するならば、 $f(x_N) > f(x_N^*)$ が成り立つ。

証明 任意の $x \in X$ と任意のナッシュ均衡 $x^* \in X$ に対して、 $x_N \leq x_N^*$ ならば、 x は x^* をパレート改善しないことを示す。

$i \in N$ が存在して、 $x_i > x_i^*$ である場合を考えよう。このとき、 $\sum_{j \neq i} x_j < \sum_{j \neq i} x_j^*$ である。 $a \in X$ が存在して、 $i \in N$ が一意に存在して、 $a_i = x_i$ であり、任意の $j \neq i$ に対して、 $a_j = x_j^*$ である。 x^* はナッシュ均衡であるから、補題1より、 $u_i(x_i^*, y_i^*) > u_i(a_i, b_i)$ が成り立つ。 $c \in X$ が存在して、 $i \in N$ が一意に存在して、 $c_i = a_i$ であり、任意の $j \neq i$ に対して、 $c_j = a_j + (a_j / \sum_{j \neq i} x_j^*) (\sum_{j \neq i} x_j - \sum_{j \neq i} x_j^*)$ である。 $c_j = a_j (\sum_{j \neq i} x_j / \sum_{j \neq i} x_j^*) \geq 0$ であるから、確かに $c \in X$ は存在する。 $\sum_{j \neq i} a_j = \sum_{j \neq i} x_j^*$ より、 $\sum_{j \neq i} c_j = \sum_{j \neq i} a_j + (\sum_{j \neq i} x_j - \sum_{j \neq i} x_j^*)$ である。 $\sum_{j \neq i} x_j < \sum_{j \neq i} x_j^*$ より、 $\sum_{j \neq i} c_j < \sum_{j \neq i} a_j$ であ

る。 $c_i = a_i$ であるから、 $u_i(a_i, b_i) \geq u_i(c_i, d_i)$ である。 $\sum_{j \neq i} a_j = \sum_{j \neq i} x_j^*$ より、 $\sum_{j \neq i} c_j = \sum_{j \neq i} x_j$ である。 $c_i = a_i = x_i$ であるから、 分配ルールに関する仮定 4 より、 $\varphi_i(c) = \varphi_i(x)$ である。 $u_i(c_i, d_i) = u_i(c_i, \varphi_i(c)) = u_i(x_i, \varphi_i(x)) = u_i(x_i, y_i)$ である。 ゆえに、 $i \in N$ が存在して、 $u_i(x_i^*, y_i^*) > u_i(x_i, y_i)$ であるから、 x は x^* をパレート改善できない。

任意の $i \in N$ に対して、 $x_i \leq x_i^*$ である場合を考えよう。 任意の $i \in N$ に対して、 $x_i = x_i^*$ ならば、 x は x^* をパレート改善できないから、 $i \in N$ が存在して、 $x_i < x_i^*$ であるとしよう。 $x_i < x_i^*$ であるプレイヤーの数を K とおく。 $1 \leq K \leq n$ である。 プレイヤーの点列 $\{i^1, i^2, \dots, i^K\}$ と戦略プロファイルの点列 $\{z^0, z^1, z^2, \dots, z^K\}$ を以下の 4 つの条件を満たすようにとる。 (i) 任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $x_{i^k} < x_{i^k}^*$ である。 (ii) i^1, i^2, \dots, i^K はすべて異なる。 (iii) $z^0 = x^*$ かつ $z^K = x$ である。 (iv) 任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $z_{i^k}^k = z_{i^k}^{k-1}$ かつ任意の $j \neq i^k$ に対して $z_j^k = z_j^{k-1}$ である。

任意の $k = 1, \dots, K$ に対して、 $u_{i^k}(x^*) = u_{i^k}(z^0) \geq u_{i^k}(z^K) = u_{i^k}(x)$ であることを示す。 $K = 1$ ならば、 ナッシュ均衡の定義より明らかに成り立つから、 $2 \leq K \leq n$ とする。 $k = 1$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、 プレイヤー i^1 が単独で戦略を $x_{i^1}^*$ から $z_{i^1}^1$ に変更すれば、 $u_{i^1}(z^0) \geq u_{i^1}(z^1)$ である。 任意の $l = 2, \dots, K$ に対して、 $z_{i^l}^1 = x_{i^l}^* > x_{i^l} = z_{i^l}^1$ かつ、 任意の $j \neq l$ に対して、 $z_j^1 = z_j^K$ である。 $\sum_{j \neq i^1} z_j^1 > \sum_{j \neq i^1} z_j^K$ であるから、 $u_{i^1}(z^1) \geq u_{i^1}(z^K)$ である。 $k = 2, \dots, K - 1$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、 プレイヤー i^k が単独で戦略を $x_{i^k}^*$ から $z_{i^k}^k$ に変更すれば、 $u_{i^k}(z^0) \geq u_{i^k}(z_{i^k}^k, x_{-i^k}^*)$ が成り立つ。 $w^k = (z_{i^k}^k, x_{-i^k}^*)$ とおく。 任意の $l = 1, \dots, k - 1$ に対して $w_{i^l}^k = x_{i^l}^* > x_{i^l} = z_{i^l}^k$ かつ、 任意の $j \neq l$ に対して $w_j^k = z_j^k$ であるから、 $u_{i^k}(w^k) \geq u_{i^k}(z^k)$ である。 任意の $l = k + 1, \dots, K$ に対して、 $z_{i^l}^k = x_{i^l}^* > x_{i^l} = z_{i^l}^k$ かつ、 任意の $j \neq l$ に対して、 $z_j^k = z_j^K$ である。 $\sum_{j \neq i^k} z_j^k > \sum_{j \neq i^k} z_j^K$ から、 $u_{i^k}(z^k) \geq u_{i^k}(z^K)$ である。 $k = K$ の場合を考えよう。 x^* はナッシュ均衡であるから、 プレイヤー i^K が単独で戦略を $x_{i^K}^*$ から $z_{i^K}^K$ に変更すれば、 $u_{i^K}(z^0) \geq u_{i^K}(z_{i^K}^K, x_{-i^K}^*)$ が成り立つ。 $w^K = (z_{i^K}^K, x_{-i^K}^*)$ とおく。 任意の $l = 1, \dots, K - 1$ に対して $w_{i^l}^K = x_{i^l}^* > x_{i^l} = z_{i^l}^K$ かつ、 任意の $j \neq l$ に対して $w_j^K = z_j^K$ であるから、 $u_{i^K}(w^K) \geq u_{i^K}(z^K)$ である。

任意の $j \neq k$ に対して、 $z_j^0 = z_j^K$ である。 $\sum_{k=1}^K z_k^0 > \sum_{k=1}^K z_k^K$ であるから、 任意の $j \neq k$ に対して、 $\sum_{i \neq j} z_i^0 > \sum_{i \neq j} z_i^K$ である。 任意の $j \neq k$ に対して、 $u_j(x^*) = u_j(z^0) \geq u_j(z^K) = u_j(x)$ である。 よって、 任意の $i \in N$ に対して、 $u_i(x^*) \geq u_i(x)$ が成り立つ。 ゆえに、 x は x^* をパレート改善できない。(証明終)

5 結論と今後の研究課題

収穫分配ゲームのナッシュ均衡において、 外部性が総生産量に与える影響について研究してきた。 非正の外部性が存在するならば、 ナッシュ均衡において、 それをパレート改善する状態より、

過剰生産が生じ、また、非負の外部性が存在するとき、過少生産になることを示した。各個人が、他の個人の利益を顧みず、自らの利益のみを追求した結果、外部性が内部化されず、過剰生産あるいは過少生産が生じてしまう。

今後の研究課題として、収穫分配ゲームのナッシュ均衡をパレート改善し、かつ、過剰生産（過少生産）を緩和するような状態をナッシュ均衡の帰結として実現するメカニズムをデザインできるかどうかということについて検証することはとても興味深い。特に、生産費用をどのように分配すべきかという観点から、分析することはとても重要である。

参考文献

- Moulin, H. and Watts, A. (1997). "Two versions of the tragedy of the commons," *Economic Design* 2, 399-421.
- Watts, A. (1996). "On the uniqueness of equilibrium in Cournot oligopoly and other games," *Games and Economic Behavior* 13, 269-285.
- Watts, A. (2002). "Uniqueness of equilibrium in cost sharing games," *Journal of Mathematical Economics* 37, 47-70.