

慣性モーメントの概念理解を深めるための物理振り子の周期測定課題

著者	本橋 健次
著者別名	MOTOHASHI Kenji
雑誌名	東洋大学教職センター紀要
巻	1
ページ	27-32
発行年	2019-03
URL	http://id.nii.ac.jp/1060/00011633/

慣性モーメントの概念理解を深めるための物理振り子の周期測定課題

A homework of time period measurement of physical pendulum to enhance the understanding of the concept of moment of inertia

本橋 健次

要 旨

大学の教養教育や学部共通教育の物理学において学生が剛体の力学を学ぶ際、概念の理解に苦勞する物理量の一つに慣性モーメントがある。回転運動における慣性モーメントは並進運動における質量に対応する重要な物理量であるが、質量のように直接測定することが困難であるため、初学者にとって理解しづらい。本研究では慣性モーメントの概念理解を深めるため、学生が自宅で個別に取り組むことのできる簡単な物理振り子(剛体振り子)の周期測定課題を開発した。そして、理工学部1年次の物理学の講義でこれを実施し、今回その10年分の答案を分析した。本研究で開発した課題は、計算と実験が容易であるにも関わらず、物理学の定量性の高さを実感でき、慣性モーメントの概念理解に有効であると考えられる。

キーワード：慣性モーメント、剛体、物理振り子

1. はじめに

慣性モーメントは剛体の回転運動を記述するために不可欠な物理量^{1~4)}であり、並進運動における質量に相当する基礎的かつ重要な物理量である。しかし、質量のように簡単に測定ができないため、初学者にとって理解しづらい。特に、高校で物理を学んでこなかった学生が大学の教養教育や共通教育において初めて剛体の力学を学ぶとき、「重心」までは理解できても「慣性モーメント」に入った途端に理解できなくなることがある。例えば、本やノートのように平面的な物体をその重心の位置で支えれば、指一本で水平に保つことができる。そして、これが支点の周りの力のモーメントのつりあい⁵⁾で説明できること(すなわち、重心の概念)は、やはり誰もが体験したことのある天秤のつりあいの実験から容易に理解できる。この例からも分かるように、概念の理解とは頭で学んだ知識と体で感じた経験が結びついて納得することであると考えられる。例えば、文部科学省中央教育審議会では、「社会に開かれた教育課程」の観点から「知識」についての考え方⁵⁾の検討が進められているが、本稿に記載した「概念理解」は、そこで述べられている「概念的知識の獲

得」とも一部対応している。そこでは、概念的知識の獲得とは知識と経験の結びつきによる納得に留まらず、さらに発展して様々な場面で活用できる能力に高めることとしている。しかしながら、慣性モーメントという物理量に対しては、その概念理解を深め得る日常的な経験が少ない上、あったとしても知識との対応関係を気づきにくい。慣性モーメントが回転運動を持続しようとする性質の強さを表す物理量であることを実感でき、それが腕の長さ(支点までの距離)と質量で決まることを納得できる経験が必要である。

そのようなとき、概念の理解を助けるのが観察や実験^{6~8)}であることは異論を挟む余地がないであろう。物理学が自然を理解するための学問である限り、実験や観察なくして概念の理解も伴わないからである。自然現象を単純化した実験を通じて、日常的な経験と知識が間接的に結びつき、概念理解に至ることが期待される。そのためには、学習者が実際の「もの」を扱う経験が重要である。例えば、平山⁶⁾は腕の各部位の寸法を測定し、腕の形状を数種類の異なる直径を持つ円板の連結体でモデル化することにより、その慣性モーメントを学習者に計算させた。

さらに、学習者の腕振り運動の周期を測定し、モデルの理論値と比較させた。極めて日常的な運動である腕振り運動をモデル化したことは、概念理解に大変有効である。しかし、腕振り運動には学習者の身体的・精神的要因が複雑に影響するので、定量性に問題があると考えられる。一方、G. B. Russevaら⁸⁾は、任意の形状に切った厚紙を重心以外の任意の支点の周りで振り子運動させ、重心から支点までの距離と周期の関係を測定させることにより、慣性モーメントに関する平行軸の定理^{9,10)}を導出させる課題を考案した。この課題は身近で簡単でありながら、定量性の高い結果を導出することができるという点で優れた手法であるが、慣性モーメント自体の概念理解には直接結びつかない。

そこで、本研究では学生が自宅で簡単に取り組むことができ、慣性モーメントの概念理解を深めるための物理振り子の課題を提案し、過去十年にわたって提出された665人分の解答結果の分析から効果を検証することを目的とした。その際、1クラス100名前後の一般的な規模の講義において、特別な準備を必要としない宿題形式の課題であることを念頭に置いた。

2. 提案課題

2.1 長方形板の慣性モーメントと物理振り子の周期

本課題は宿題形式をとっており、その日の授業で棒、板、円板などの基本的な慣性モーメントの計算方法を学んでいることを前提としている。とりわけ長方形板の任意の点の周りの慣性モーメント I の計算^{9,10)}は、この課題を解く上で必須の例題である。

$$I = \frac{M}{ab} \int_0^b \int_0^a \{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2\} dx dy \quad (1)$$

ここで、 M は板の質量、 a と b は長方形の板の一辺の長さ、 (x_0, y_0) は図1に示すように、長方形の一つの頂点(図1の0点部分)を原点としたときの回転軸の位置座標を表す。

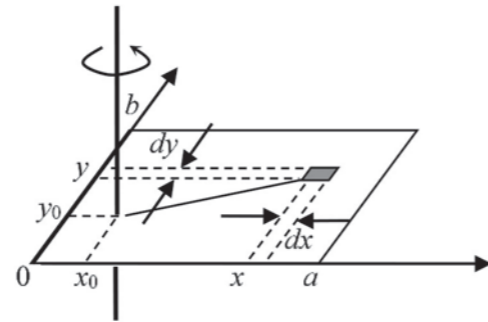


図1 長方形板の任意の点の周りの慣性モーメントの計算に必要な座標(図2の上部挿絵を拡大)

(1) 式を計算すると、 I/M は次式で表される。

$$\frac{I}{M} = \frac{a^2+b^2}{3} + x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 \quad (2)$$

課題#3 慣性モーメントの計算例				提出締切日 2018.11.8	検印
氏名	学籍番号	提出欄 (いずれかに○)	A / B / C		

1. 第6回の講義の例6.4において、幅 a 、奥行き b の長方形の板の、任意の位置 (x_0, y_0) を通り、面に垂直な軸のまわりの慣性モーメント I が次式で与えられることを学んだ。(ただし、 $0 < x_0 < a$ 、 $0 < y_0 < b$)

$$\frac{I}{M} = \frac{a^2+b^2}{3} + x_0^2 + y_0^2 - ax_0 - by_0 \quad (3.1)$$

(3.1)式は、厚さのある直方体にも適用できる。(証明は省略)
授業中に配布した木片の広い面を xy 面とする。この面で任意の位置 (x_0, y_0) を選び(ただし、重心は除く)、その位置にペンで印(●)をつけ、板の隅からその点までの長さ x_0 と y_0 及び板の幅 a と奥行き b をできるだけ正確に定規で測定し、SI単位(m)で下表に記入せよ。さらに、その値を(3.1)式に代入し、 I/M の値をSI単位(m²)で記入せよ。赤ペンの印は木片の反対面の面対称位置にもつけておく。

0.5mmの精度で測定せよ。 有効数字に注意。	a (m) =	b (m) =
	x_0 (m) =	y_0 (m) =
	I/M (m ²) =	

2. 水平な固定軸のまわりに自由に回転でき、重力の作用によって振動する剛体を物理振り子という。物理振り子の振動の周期 T (s)は次式で表される。(詳細は参考書「詳解物理学」のp.85参照)

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (3.2)$$

ここで、 π は円周率、 g は重力加速度、 h は剛体の重心から回転軸までの距離である。
次式により計算した距離 h (m)、円周率 $\pi=3.14$ 、重力加速度 $g=9.80$ (m/s²)、1で求めた I/M (m²)の値を(3.2)式に代入し、周期 T (s)を求めよ。

$$h = \sqrt{(x_0 - a/2)^2 + (y_0 - b/2)^2} \quad (3.3)$$

針や曲びようを両面に記入した印の位置に垂直にさし、両者が水平になるように厚手の本などで挟むように支え、木片を振動させてみよ。30周期分の時間を0.1秒の精度で測定し、その値を30で割ることにより T の実験値を求め、先ほどの理論値と比較せよ。(有効数字に注意すること。)

0.1sの精度で測定	h (m) =	理論値 T (s) =
	実験値 30 T (s) =	実験値 T (s) =

曲びようや針を取り除いた木片に学籍番号、氏名、自己評価を記入し、本解答紙と別々に提出せよ。

図2 長方形板の任意の軸の周りの慣性モーメントと物理振り子の振動周期を求める計算と実験の課題

筆者の授業では、敢えて平行軸の定理^{9,10)}は使わずに、15分程度の時間を割いてこの例題を解かせている。この計算には二重積分が必要なので、数学が苦手な学生は及び腰になりがちだが、実際には x^2 と y^2 の積分を一回ずつ繰り返すだけで解けることが分かるとハードルは一気に下がり、手が動き始める。多重積分の苦手意識をなくすための例題としてもこの計算は貴重であると考えられる。

一方、重心 G を除く任意の点 (x_0, y_0) を通る板に垂直な回転軸で板を支え、図2の中段挿絵で示されるような重力による振り子運動(物理振り子または剛体振り子運動)をさせたとき、振幅が小さい場合の振動周期 T は近似的に(3)式で与えられる。^{6,7,9-11)}

$$T \cong 2\pi \sqrt{\frac{I}{Mgh}} \quad (3)$$

ただし、 g は重力加速度の大きさ、 h は回転軸の位置座標 (x_0, y_0) と重心座標 (x_G, y_G) との間の距離であり、(4)式で表される。

$$h = \sqrt{(x_0 - x_G)^2 + (y_0 - y_G)^2} \\ = \sqrt{(x_0 - a/2)^2 + (y_0 - b/2)^2} \quad (4)$$

また、板の厚さを考えた場合の慣性モーメントも(2)式と等しくなることは明らかなので、ここでは説明を省いた。なお、この課題に取り組む段階では、学生はまだ剛体の回転に対する運動の法則を学んでいないため、(3)式の導出を行っていない。そのため、周期 T が重心からの距離 h で表される理由、すなわち、重心に働く外力のモーメントの総和が回転運動を決定することについては言及を避けた。また、慣性モーメント(1)式の計算において、原点を最初から重心 G にとることもできるが、その場合、学生は最初から板の重心 (x_G, y_G) に印をつけてから回転軸座標 (x_0, y_0) を決めなくてはならず、長さの測定誤差や測定ミスが増えることから、板の頂点を原点とした。

2.2 課題の詳細

本課題では学生は計算と共に実験を行うので、表1及び図3のような実験用材料を全員に配布した。板(図3左)は桧の節なし工作材料の端材板として安価にネット販売されているので、それを利用した。端材の利点は安価なだけでなく、材質や寸法が様々であるため、学生が他人の答案を写すことができないことを保証してくれる点である。固定軸の役割を果たす針は大学生協で販売されている長さ26mm、頭の直径約1.6mmのオフィスピン(図3右)を使用した。待ち針のように頭が大きいと、支点と回転軸が異なってしまい、実験値に影響が出てしまうので、なるべく頭の小さいものがよい。なお、筆者は

表1 物理振り子の実験課題に必要な材料
(数量：学生一人当たり)

品名	サイズ	数量	金額	入手先
無節の桧工作材料の端材板	縦 40 ~ 70 mm, 横 50 ~ 120 mm, 厚さ 6 ~ 12 mm	1	1000円 (1.5kg入り)	ネット通販
オフィスピン	針の直径 0.73 mm, 頭の直径 1.6 mm, 長さ 26 mm	2	500円 (100g入り)	大学生協



図3 板(左)とオフィスピン(右)の写真

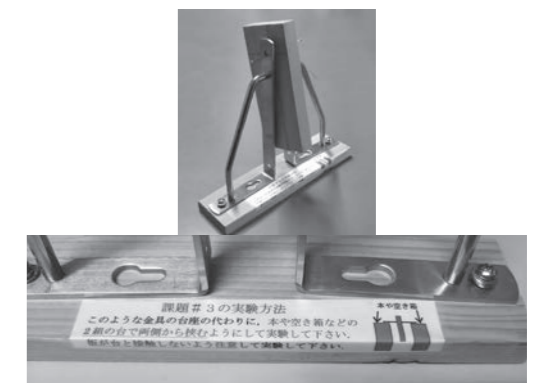


図4 授業中に回覧した物理振り子の見本の写真(上)と台座に添付した実験方法の注意書き(下)

板とオフィスピンを入れた紙袋を授業中に回し、必要な材料を学生に取らせている。その際、図4のような物理振り子の見本もいっしょに回覧し、具体的な実験方法も学生に提示した。ただし、図4の見本で使用したステンレス製の台座の代わりに、本や空き箱などで板の両側のピンを支えるよう、注意書きも添えた(台座の下部)。また、危険防止のため、オフィスピン2本をセロハンテープで板に貼りつけて持ち帰るよう指示し、セロハンテープもいっしょに袋に入れて回している。

学生には、図2及び図4のように、板の重心を除く任意の位置にオフィスピンを2本刺し、それらを支点として両側から水平に支え、30周期分の時間を0.1秒の精度で測定するよう指示した。2本のピンが水平に置かれていること、板が本などに擦れないように振動させることが重要であることも伝えた。最近はスマートフォンアプリでもストップウォッチと遜色ない機能と精度を簡単に実現できるので、学生が0.1秒精度の時間測定に困ることはない。しかし、この課題を導入した当初はインターネット上のストップウォッチのサイトを紹介し、パソコンによる測定を推奨していた。一方、ストップウォッチをスタートさせた瞬間を0回とし、30回目で元の位置に戻ってきたときストップさせるよう念を押した。スタートさせた瞬間に1から数え始めれば1周期分時間を短く測定してしまうし、元の位置と反対の位置でストップさせれば0.5周期分短く測定してしまうからである。当たり前のことではあるが、これを間違える学生がいるのも事実である。板の二辺の長さ a, b と回転軸の座標 x_0, y_0 の長さは0.5mmの精度で測定するよう指示した。さらに、理論値と実験値は最低でも2桁の精度で一致するはずであり、そうならない場合には理論と実験のどちらか(または両方)が間違っている可能性が高く、その場合は再提出になる可能性もあることを予め伝えた。とは言え、実際には計算ミスその他、板の長さ a, b と回転軸位置座標 x_0, y_0 の縦横の組合せを逆にする、30周期分の時間が5秒以上理論値と異なる、などの明らかな測定上のミスがない限りは受理した。当然、採点では個々の板の長さを測定しなければならない

が、表計算ソフトに計算式を入力しておけば、学生の理論計算の誤答案はすぐに判別できるので、それほど大きな負担にはならない。実験結果が正しいか誤りかの判断に微妙なケースは多少あるが、その場合は再提出にはせず受理した上で、「もっとよく一致するはずなので、再度実験してみてください。」といったコメントをつけて返却した。なお、提出締め切りは翌週の授業終了時で、板からピンを抜き、学籍番号と氏名を板とプリントそれぞれに記入し、それらを別々に提出させた。

3. 答案の分析結果

3.1 課題提出状況

図5に課題の提出者数(a)と提出割合(b)の年度推移を示す。図5(a)より、履修登録者数と提出者数は共に増加傾向であるが、再提出の未提出者数はほぼ横ばいである。履修登録者数の増加には授業運営の善し悪し以外にも時間割その他の様々な要因がある。一方、図5(b)より、課題提出者数の履修登録者数に対する割合は2011年度以降85%前後でほぼ横ばいである。2010年度以前はオフィスピンを配布せず、自宅にあるもので代用させていたため、提出率が低かったと考えられる。必要な材料をすべて配布することが提出率の向上には大変重要である。提出者数に対して、最終的に正答として受理された割合は90%に達した。

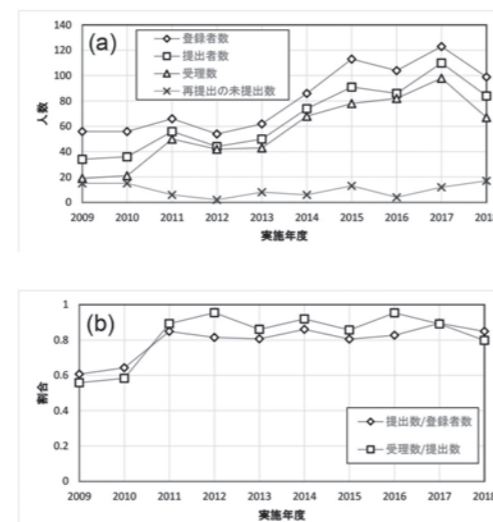


図5 課題提出者数(a)と割合(b)の年度推移

3.2 理論値と実験値の答案分析結果

次に、総提出者665人のうち再提出も含めて最終的に受理された568人分の答案に対し、理論値と実験値の相対誤差(絶対値を取らない相対的な差)を分析した結果を図6に示す。受理されなかった97人分の答案は計算ミスや明らかな測定ミスのため本人に返却して再提出を求めたが、その後、再提出されなかった答案である。この結果から、89%の答案が相対誤差5%以内に収まっており、有効数字2桁以上が達成されている。しかし、相対誤差0.2%以内に見られる鋭いピークはゆるやかなガウス分布から大きく外れており、三桁以上一致する精度で結果を出した学生が12%もいたことが分かる。このように、簡単な実験にもかかわらず、高い精度の測定^{7,8)}が可能であることが分かった。

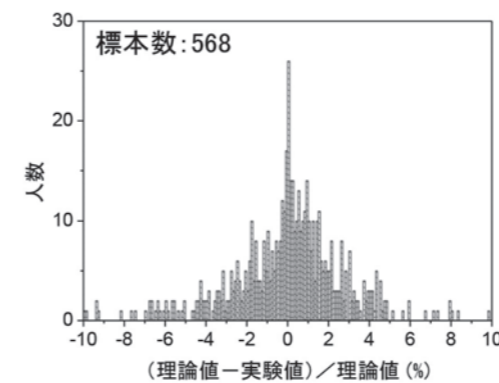


図6 理論値と実験値の誤差分布

本課題が学生の慣性モーメントの理解度にどれぐらい寄与したかを直接調べることは容易ではないが、課題の得点と試験の得点の相関関係が一つの指標になると考えられる。図7は本課題の得点(10点満点)と中間試験の得点(100点満点)の相関を散布図(a)と二次元の頻度分布(b)で表したグラフである。図7(b)では、人数を対数のグレースケールで表示した。全15回の講義の8回目に行った中間試験の範囲は「剛体の力学」であるため、慣性モーメントの概念理解は中間試験結果に大きな影響を及ぼすと考えられる。図7(a)より、中間試験の得点は本課題の得点に対して弱い正の相関(相関係数0.312)を持

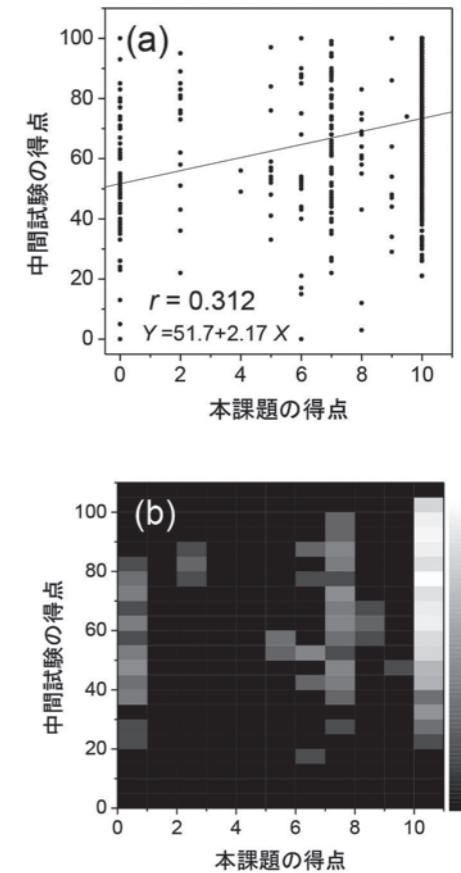


図7 本課題と中間試験の得点の相関 (a: 散布図, b: 二次元頻度分布)

つことが分かる。また、線形近似における傾きが2.17であることから、本課題の1点分が中間試験に約2点分のプラスの影響を与えたと考えられる。すなわち、線形近似だけで考えれば、本課題10点分が中間試験結果におよそ20点分の影響を与えたことになる。もちろん、中間試験の得点にはそれ以外の要因による大きな個人差があり、本課題が0点(未提出)であっても中間試験で100点を取った学生もいれば、逆に、本課題で10点を取っても中間試験が20点程度の学生もいる。しかしながら、図7(b)のような二次元頻度表示では、当然、そのような極端な例は少ないことが分かる。本課題で満点を取った学生の場合、中間試験では75~80点の得点を取った人数が最大であるのに対し、本課題で0点(未提出)の学生の場合、

中間試験で 45 ～ 50 点を取った人数が最大である。当然のことながら、本課題だけで剛体の力学全般の理解度を押し量ることはできない。しかし、本課題の得点と中間試験の得点が弱い正の相関を持ち、その比(=中間試験の得点/本課題の得点)が 2 を超えたことから、慣性モーメントの概念理解に一定の効果を上げたと考えられる。このように、本課題が剛体の回転運動の理解に与える影響が客観的なデータで示されたことは注目に値する。

3.3 再提出答案

一回以上の再提出によって最終的に正答に達した答案も多い。誤答箇所として最も多いのが、板の二辺の長さ a, b や回転軸座標 x_0, y_0 の長さの測定ミスであり、次いで、(2)～(4) 式の数値計算ミスや周期の測定ミスである。その他、単位換算ミスや位取りのミスなども少数ではあるが見られた。二回以上の再提出は、上記のミスを複数回に分けて起こした場合に多い。

なお、再提出の回数によらずその都度の期限内に正答にたどり着いた答案は 10 点、期限後に提出された答案は 7 点満点とし、正答にたどり着かなかった答案は程度に応じてその間の点数とした。(図 7 の横軸参照)

4. まとめ

慣性モーメントの概念理解を深めることを目的として、学生が一人で実施可能な物理振り子の実験課題を実施し、その 10 年分の答案を分析した。履修登録者の約 85% が課題を提出し、そのうちおよそ 90% が正答を導いた。さらに、正答数の 89% は理論値に対する実験値の相対誤差が 5% 以内であり、正答数の 12% が相対誤差 0.2% 以内であった。このように、本稿で紹介した課題は簡単でありながら、精度の高い結果を導き出すことができるため、学生は物理学の定量性の高さを実感できると考えられる。さらに、剛体の力学に対する中間試験結果と本課題の得点には弱い正の相関(相関係数 0.312)が見られたことから、学生の理解度向上に一定の効果があったと考えられる。

参考文献

- 1) 田中文男、物理教育、**23** (1) (1975) 20-24.
- 2) 北林照幸、藤城武彦、滝内賢一、基礎から学ぶ物理学、講談社(2018) p. 93.
- 3) 高橋正雄、工科系の基礎物理学、東京教学社(1996) p. 86-93.
- 4) 中野嘉弘、大学の物理教育、**21** (1) (2015) 39-40.
- 5) 文部科学省ホームページ、中央教育審議会・初等中等教育分科会・教育課程部会・芸術ワーキンググループ・教育課程部会・芸術ワーキンググループ(第7回) 配付資料、資料 5「知識」についての考え方のイメージ(たたき台) http://www.mext.go.jp/b_menu/shingi/chukyo/chukyo3/069/siryo/attach/1371893.htm
- 6) 平山 修、物理教育、**59** (3) (2011) 175-180.
- 7) T. H. Richardson and S. A. Brittle, Phys. Educ. **47** (5) (2012) 537-544.
- 8) G. B. Russeva, G. G. Tsutsumanova and S. C. Russev, Phys. Educ. **45** (1) (2010) 58-62.
- 9) 原 康夫、詳解物理学、東京教学社、(2010) p. 83-86.
- 10) 原 康夫、物理学基礎 第5版、学術図書出版社、(2016) p. 96-100.
- 11) M. Kladivová and L. Mucha, Eur. J. Phys. **35** (2) (2014) 025018.