距離 r に逆比例するポテンシャルをもつ Dirac 方程式の束縛解

手　塚　洋　一*

Bound State Solutions of Dirac Equation with r–inverse Potentials

Hirokazu TEZUKA

Abstract

Bound state solutions of Dirac equations with scalar and vector potentials are discussed. The potentials are assumed to be spherically symmetric and inversely proportional to distance r. The vector potential in inverse proportion to r is called Coulomb potential. The Dirac equation with Coulomb potential is known to be solved analytically, and in this article it is shown that the Dirac equation with scalar potential can also be solved analytically. Analytical solutions of the Dirac equation with both scalar and vector potentials are given, and the cases with vector potential only, scalar potential only, and scalar and vector potentials of the equal magnitude are discussed. The Dirac equation with scalar potential has bound state solutions only when the potential is attractive unlike vector one, and has no irregular solutions.

1　はじめに

ポテンシャル内で運動する質量 m のフェルミ粒子を考える．スカラーポテンシャルを $S(r)$，ベクトルポテンシャルを $V_\mu(r)$ とすると，ポテンシャルはそれぞれ運動方程式内の 4 元運動量 p_μ を

$$p_\mu \longrightarrow p_\mu - V_\mu(r) \tag{1.1}$$

質量 m を

$$m \longrightarrow m + S(r) \tag{1.2}$$

* 東洋大学自然科学研究室　〒351-8510 埼玉県朝霞市岡 2-11-10
Natural Science Laboratory, Toyo University, 11-10, Oka 2, Asaka-shi, Saitama 351-8510, JAPAN

と置き換えることによって導入される.

対応する Dirac 方程式は

$$\{\gamma^{\mu}p_{\mu}-\gamma^{\mu}V_{\mu}(r)-m-S(r)\}\Phi(r)=0 \tag{1.3}$$

と書ける. γ^{μ} は Dirac の γ 行列で, p_{μ} は相対論的粒子の 4 元運動量を表す. $\mu=0$ は時間成分, $\mu=1, 2, 3$ は空間成分を表す. 粒子の波動関数は $\Phi(r)$ と書かれている. 議論を簡単にするため, ベクトルポテンシャルは空間成分を持たず, 第 0 成分だけであると仮定する.

$$V_{\mu}(r)=V(r)\delta_{\mu 0} \tag{1.4}$$

さらにスカラーポテンシャル $S(r)$, ベクトルポテンシャル $V(r)$ が時間依存性を持たないと仮定すれば, Dirac 方程式 (1.3) はエネルギー E を持つ定常状態の運動方程式に書き換えることができる.

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\beta\{m+S(r)\}+V(r)]\Psi(\boldsymbol{r})=E\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{1.5}$$

$\boldsymbol{\alpha}$, β は Dirac 行列であり, $\boldsymbol{p}$ は 3 次元の波動関数 $\Psi(\boldsymbol{r})$ で表される粒子の 3 元運動量である.

この論文ではポテンシャルとして角度依存性を持たず球対称であり, 距離 r に逆比例する

$$S(r)=\frac{Z_S}{r} \tag{1.6}$$

$$V(r)=\frac{Z_V}{r} \tag{1.7}$$

を扱う. Z_S, Z_V はそれぞれのポテンシャルの強さを表す定数であるが, $Z_S<0$ の場合には, 距離 r が大きくなるに従い, $S(r)$ が負で絶対値が小さくなるため, 有効質量 $m^*=m+S(r)$ が大きくなる. また, $Z_V<0$ の場合には, r とともに $V(r)$ が大きくなり (負で絶対値は小さくなる), エネルギーE が大きくなる. これらの傾向はともに引力的とみなされる. (粒子が原点 ($r=0$) 付近に引き寄せられる方がエネルギー的に有利である.) すなわち, Z_S, Z_V が負の場合には引力的であり, 逆に正符号の場合には斥力的であると考えられる.

ベクトルポテンシャルのみの場合はクーロン力とよばれ, 多くの文献ですでに解析的な解が扱われており, 非正則な解も含めてすでに紀要などで議論された. この論文では, スカラーポテンシャルを含めた場合にも一般的に解けることが示され, スカラーポテンシャルのみの場合, ベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの大きさが等しい場合などの束縛状態が議論される.

2 荷電対称な解

質量 m のフェルミ粒子が従う相対論的な運動方程式として, 定常状態の Dirac 方程式

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\{m+S(r)\}\beta+V(r)]\Psi(\boldsymbol{r})=E\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.1}$$

を考える.

まず，運動方程式（2.1）がこれらのポテンシャルのもとで固有エネルギー E の束縛状態の解を持つものと仮定する．（2.1）の両辺の左側から $\beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3$ をかける．Dirac 行列が

$$\beta\alpha_i + \alpha_i\beta = 0 \quad (i = 1, 2, 3) \tag{2.2}$$

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 0 \quad (i \neq j) \tag{2.3}$$

なる性質を持っていることを使うと，新しい運動方程式は

$$[-\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} - \{m + S(r)\}\beta + V(r)]\Psi_c(\boldsymbol{r}) = E\Psi_c(\boldsymbol{r}) \tag{2.4}$$

となる．ただし

$$\Psi_c(\boldsymbol{r}) = \beta\alpha_1\alpha_2\alpha_3\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{2.5}$$

である．この式は全体の符号を変えて

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p} + \{m + S(r)\}\beta - V(r)]\Psi_c(\boldsymbol{r}) = \bar{E}\Psi_c(\boldsymbol{r}) \tag{2.6}$$

と書き変えられる．ただし $\bar{E} = -E$ である．方程式 (2.1) と (2.6) を比べると，運動方程式 (2.1) に従う粒子に対しポテンシャル $S(r)$，$V(r)$ のもとで固有エネルギー E の束縛状態の解が存在するならば，(2.6) からポテンシャル $S(r)$，$-V(r)$ のもとで固有エネルギー $\bar{E} = -E$ の束縛状態の解が存在することになる．すなわち，スカラーポテンシャルだけの場合は，束縛状態が存在するなら，必ず反符号の固有エネルギーを持つ束縛状態も存在することを示している．ベクトルポテンシャルだけの場合には，引力ポテンシャルに対し束縛状態が存在するなら，同じ大きさの斥力ポテンシャルでも反符号の固有エネルギーを持つ束縛状態が存在することを示している．これらは相対論的な運動方程式が，粒子と反粒子に対し対称的に書かれているために求まる解であり，荷電対称な解と呼ばれる．

3 一般的解析解

距離 r に逆比例するポテンシャル

$$S(r) = \frac{Z_S}{r} \tag{3.1}$$

$$V(r) = \frac{Z_V}{r} \tag{3.2}$$

は中心力で角度依存性を持たないと仮定しているから，4 成分スピノール $\Psi(\boldsymbol{r})$ を 2 成分の動径部分と角度部分に分け

$$\Psi(\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} i\dfrac{G(r)}{r}\varphi^l_{j,m}(\Omega) \\ \dfrac{F(r)}{r}\dfrac{\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{r}}{r}\varphi^{l}_{j,m}(\Omega) \end{pmatrix} \tag{3.3}$$

とおけば，定常状態の Dirac 方程式

$$[\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{p}+\{m+S(r)\}\beta+V(r)]\Psi(\boldsymbol{r})=E\Psi(\boldsymbol{r}) \tag{3.4}$$

を変数分離できる．j は全角運動量，m はその第 3 成分，ℓ は軌道角運動量である．また $\boldsymbol{\sigma}$ は Pauli 行列である．単純な計算により動径成分 r に関する運動方程式が分離され

$$\frac{dG(r)}{dr}=-\frac{\kappa}{r}G(r)+\{E-V(r)+m+S(r)\}F(r) \tag{3.5}$$

$$\frac{dF(r)}{dr}=\frac{\kappa}{r}F(r)-\{E-V(r)-m-S(r)\}G(r) \tag{3.6}$$

と求まる．ただし $j=\ell\pm\frac{1}{2}$ に対して

$$\kappa=\mp\left(j+\frac{1}{2}\right) \tag{3.7}$$

と定義されている．

ポテンシャルの形を代入し

$$\frac{dG(r)}{dr}=-\frac{\kappa}{r}G(r)+\left(E+m+\frac{Z_S-Z_V}{r}\right)F(r) \tag{3.8}$$

$$\frac{dF(r)}{dr}=\frac{\kappa}{r}F(r)-\left(E-m-\frac{Z_S+Z_V}{r}\right)G(r) \tag{3.9}$$

さらに，束縛問題として，$|E|<m$ を仮定して

$$W=\frac{E}{m} \tag{3.10}$$

$$\lambda=\sqrt{1-W^2} \tag{3.11}$$

$$x=2m\lambda r \tag{3.12}$$

と変数を書き換えると，運動方程式 (3.8)，(3.9) は

$$\frac{dG(x)}{dx}=-\frac{\kappa}{x}G(x)+\left(\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}\right)F(x) \tag{3.13}$$

$$\frac{dF(x)}{dx}=\frac{\kappa}{x}F(x)+\left(\frac{1-W}{2\lambda}+\frac{Z_S+Z_V}{x}\right)G(x) \tag{3.14}$$

となる．

3.1　漸近解

方程式 (3.13) より

$$F(x)=\frac{1}{\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}}\left\{\frac{dG(x)}{dx}+\frac{\kappa}{x}G(x)\right\} \tag{3.15}$$

となるから，(3.14) に代入して

$$\begin{aligned}&\frac{-\frac{Z_S-Z_V}{x^2}}{\left(\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}\right)^2}\left\{\frac{dG(x)}{dx}+\frac{\kappa}{x}G(x)\right\}\\&\quad+\frac{1}{\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}}\left\{\frac{d^2G(x)}{dx^2}-\frac{\kappa}{x^2}G(x)+\frac{\kappa}{x}\frac{dG(x)}{dx}\right\}\\&=\frac{1}{\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}}\left\{\frac{\kappa}{x}\frac{dG(x)}{dx}+\frac{\kappa^2}{x^2}G(x)\right\}+\left(\frac{1-W}{2\lambda}+\frac{Z_S+Z_V}{x}\right)G(x)\end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned}\frac{d^2G(x)}{dx^2}=&\frac{\frac{Z_S-Z_V}{x^2}}{\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}}\left\{\frac{dG(x)}{dx}+\frac{\kappa}{x}G(x)\right\}\\&+\left\{\frac{1-W^2}{4\lambda^2}+\frac{Z_S^2-Z_V^2}{x^2}+\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda x}\right\}G(x)+\frac{\kappa(1+\kappa)}{x^2}G(x)\end{aligned} \tag{3.16}$$

となる．ここで，$x\to\infty$ として漸近的方程式を考えると，残る項は

$$\frac{d^2G(x)}{dx^2}=\frac{1-W^2}{4\lambda^2}G(x) \tag{3.17}$$

となる．すなわち，この方程式の解として，漸近的な波動関数は

$$G(x)=e^{-\alpha x} \tag{3.18}$$

ただし，

$$\alpha^2=\frac{1-W^2}{4\lambda^2}=\frac{1}{4} \tag{3.19}$$

である．波動関数が収束する（$x\to\infty$ で$G(x)\to 0$ となる）ためには $\alpha>0$ でなければならないから

$$\alpha=\frac{1}{2} \tag{3.20}$$

すなわち $x\to\infty$で

$$G(x)=e^{-\frac{x}{2}} \tag{3.21}$$

である．

$F(x)$ に関する漸近解も同様に $x\to\infty$ で

$$F(x)=e^{-\frac{x}{2}} \tag{3.22}$$

となることが確かめられる.

3.2 一般解

波動関数 $G(x)$ と $F(x)$ の $x\to\infty$ での漸近解 $e^{-\frac{x}{2}}$ を使って，これらの波動関数の形を

$$G(x)=\sqrt{1+W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g+f) \tag{3.23}$$

$$F(x)=\sqrt{1-W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g-f) \tag{3.24}$$

と仮定する．g, f は x の関数である.

$$\frac{dG(x)}{dx}=\sqrt{1+W}\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(g+f)+e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dg}{dx}+\frac{df}{dx}\right)\right\} \tag{3.25}$$

となるから，運動方程式（3.13）に代入して

$$\begin{aligned}&\sqrt{1+W}\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(g+f)+e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dg}{dx}+\frac{df}{dx}\right)\right\}\\&\quad=-\frac{\kappa}{x}\sqrt{1+W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g+f)+\left(\frac{1+W}{2\lambda}+\frac{Z_S-Z_V}{x}\right)\sqrt{1-W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g-f)\end{aligned}$$

整理すると

$$\begin{aligned}\frac{dg}{dx}+\frac{df}{dx}&=-\frac{\kappa}{x}(g+f)+g+\sqrt{\frac{1-W}{1+W}}\frac{Z_S-Z_V}{x}(g-f)\\&=-\frac{\kappa}{x}(g+f)+g+\frac{1-W}{\lambda}\frac{Z_S-Z_V}{x}(g-f)\end{aligned} \tag{3.26}$$

となる.

同様に

$$\frac{dF(x)}{dx}=\sqrt{1-W}\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(g-f)+e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dx}\right)\right\} \tag{3.27}$$

だから，（3.14）に代入し

$$\begin{aligned}&\sqrt{1-W}\left\{-\frac{1}{2}e^{-\frac{x}{2}}(g-f)+e^{-\frac{x}{2}}\left(\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dx}\right)\right\}\\&\quad=\frac{\kappa}{x}\sqrt{1-W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g-f)+\left(\frac{1-W}{2\lambda}+\frac{Z_S+Z_V}{x}\right)\sqrt{1+W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g+f)\end{aligned}$$

となり

$$\frac{dg}{dx}-\frac{df}{dx}=\frac{\kappa}{x}(g-f)+g+\sqrt{\frac{1+W}{1-W}}\frac{Z_S+Z_V}{x}(g+f)$$
$$=\frac{\kappa}{x}(g-f)+g+\frac{1+W}{\lambda}\frac{Z_S+Z_V}{x}(g+f) \tag{3.28}$$

が求まる．(3.26) と (3.28) の和と差をとって，新たに二つの運動方程式

$$\frac{dg}{dx}=-\frac{\kappa}{x}f+g+\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda x}g+\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda x}f \tag{3.29}$$

$$\frac{df}{dx}=-\frac{\kappa}{x}g-\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda x}g-\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda x}f \tag{3.30}$$

が求まる．

さらに，g と f を多項式で

$$g=x^{\gamma}\sum_{k=0}\alpha_k x^k \tag{3.31}$$

$$f=x^{\gamma}\sum_{k=0}\beta_k x^k \tag{3.32}$$

と展開すると

$$\frac{dg}{dx}=x^{\gamma}\sum_{k=0}\alpha_k(\gamma+k)x^{k-1} \tag{3.33}$$

$$\frac{df}{dx}=x^{\gamma}\sum_{k=0}\beta_k(\gamma+k)x^{k-1} \tag{3.34}$$

となるから，これを使って，(3.29) と (3.30) を書き直すと

$$\sum_{k=0}\alpha_k(\gamma+k)x^{k-1}=-\kappa\sum_{k=0}\beta_k x^{k-1}+\sum_{k=0}\alpha_k x^k$$
$$+\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1}+\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\sum_{k=0}\beta_k x^{k-1} \tag{3.35}$$

$$\sum_{k=0}\beta_k(\gamma+k)x^{k-1}=-\kappa\sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1}$$
$$-\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1}-\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\sum_{k=0}\beta_k x^{k-1} \tag{3.36}$$

となる．これらの方程式が常に成り立たなくてはならないから，これらが x に関する恒等式になることを要求すると，係数 α_k および β_k に関する漸化式として

$$\alpha_k(k+\gamma)=\alpha_{k-1}+\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\alpha_k-\left(\kappa-\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)\beta_k \tag{3.37}$$

$$\beta_k(k+\gamma)=\left(-\kappa-\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)\alpha_k-\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\beta_k \tag{3.38}$$

が求まる．原点 $r=0$ ($x=0$) で波動関数 (3.31)，(3.32) が積分可能であるためには γ は $-\frac{1}{2}$ よりも大きくなくてはならない．β_0 が与えられれば，上の漸化式を使って順に α_k および β_k が決まることになる．β_0 自身は規格化条件から決められる．

上の式は $k=0$ に対して

$$\left(\gamma-\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\right)\alpha_0+\left(\kappa-\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)\beta_0=0 \tag{3.39}$$

$$\left(\kappa+\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)\alpha_0+\left(\gamma+\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\right)\beta_0=0 \tag{3.40}$$

となる．この式は α_0 と β_0 に関する連立方程式の形になっている．この連立方程式が $\alpha_0=\beta_0=0$ という自明な解以外の解を持つためには

$$\gamma^2-\left(\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\right)^2-\kappa^2+\left(\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)^2=0 \tag{3.41}$$

を満たさなくてはならない．この条件式は

$$\begin{aligned}\gamma^2&=\kappa^2+\left(\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\right)^2-\left(\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)^2\\&=\kappa^2+\frac{1-W^2}{\lambda^2}Z_S^2-\frac{1-W^2}{\lambda^2}Z_V^2\\&=\kappa^2+(Z_S^2-Z_V^2)\end{aligned} \tag{3.42}$$

すなわち

$$\gamma=\pm\sqrt{\kappa^2+(Z_S^2-Z_V^2)} \tag{3.43}$$

と書き変えられる．

二つの漸化式（3.37），（3.38）を解くと

$$\alpha_k=-\frac{\dfrac{Z_S+WZ_V}{\lambda}+\gamma+k}{\kappa+\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}}\beta_k \tag{3.44}$$

$$\beta_k=\frac{\dfrac{Z_S+WZ_V}{\lambda}-\gamma-k}{\kappa-\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}}\alpha_k+\frac{1}{\kappa-\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}}\alpha_{k-1} \tag{3.45}$$

となるが，β_k の式はさらに，式（3.44）を使って

$$\beta_k=-\frac{\left(\dfrac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\right)^2-(\gamma+k)^2}{\kappa^2-\left(\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)^2}\beta_k-\frac{\dfrac{Z_S+WZ_V}{\lambda}+\gamma+k-1}{\kappa^2-\left(\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)^2}\beta_{k-1}$$

と書き換えられる．整理すると

$$\{\kappa^2+(Z_S^2-Z_V^2)-(\gamma+k)^2\}\beta_k=-\left\{\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}+\gamma+(k-1)\right\}\beta_{k-1}$$

となり，（3.42）式を使って

$$\{\gamma^2-(\gamma+k)^2\}\beta_k=-\left\{\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}+\gamma+(k-1)\right\}\beta_{k-1}$$

$$\therefore \quad \beta_k = \frac{\dfrac{Z_S + WZ_V}{\lambda} + \gamma + (k-1)}{k(2\gamma+k)}\beta_{k-1}$$
$$= \frac{N+k-1}{k(2\gamma+k)}\beta_{k-1}$$
$$= \frac{N+k-1}{k(2\gamma+k)}\frac{N+k-2}{(k-1)(2\gamma+k-1)}\beta_{k-2}$$
$$= \frac{(N+k-1)(N+k-2)\cdots\cdots(N+1)N}{k!(2\gamma+k)(2\gamma+k-1)\cdots\cdots(2\gamma+2)(2\gamma+1)}\beta_0 \tag{3.46}$$

となる．ただし

$$N = \frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} + \gamma \tag{3.47}$$

という記号を導入した．

(3.44) 式は，上の式を使って

$$\alpha_k = -\frac{N+k}{\kappa + \dfrac{WZ_S + Z_V}{\lambda}}\beta_k$$
$$= -\frac{(N+k)(N+k-1)(N+k-2)\cdots\cdots(N+1)N}{\left(\kappa + \dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\right)k!(2\gamma+k)(2\gamma+k-1)\cdots\cdots(2\gamma+2)(2\gamma+1)}\beta_0 \tag{3.48}$$

となる．これらを使って，式 (3.23)，(3.24) を書き直すと

$$G(x) = \sqrt{1+W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g+f)$$
$$= \sqrt{1+W}\,e^{-\frac{x}{2}}x^{\gamma}\sum_{k=0}(\alpha_k+\beta_k)x^k$$
$$= -e^{-\frac{x}{2}}x^{\gamma}\sum_{k=0}\frac{\sqrt{1-W}\,(Z_S-Z_V)+\sqrt{1+W}\,(\gamma+k-\kappa)}{\kappa+\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}}$$
$$\times\frac{(N+k-1)(N+k-2)\cdots\cdots(N+1)N}{k!(2\gamma+k)(2\gamma+k-1)\cdots\cdots(2\gamma+2)(2\gamma+1)}\beta_0\,x^k \tag{3.49}$$

$$F(x) = \sqrt{1-W}\,e^{-\frac{x}{2}}(g-f)$$
$$= \sqrt{1-W}\,e^{-\frac{x}{2}}x^{\gamma}\sum_{k=0}(\alpha_k-\beta_k)x^k$$
$$= -e^{-\frac{x}{2}}x^{\gamma}\sum_{k=0}\frac{\sqrt{1+W}\,(Z_S+Z_V)+\sqrt{1-W}\,(\gamma+k+\kappa)}{\kappa+\dfrac{WZ_S+Z_V}{\lambda}}$$
$$\times\frac{(N+k-1)(N+k-2)\cdots\cdots(N+1)N}{k!(2\gamma+k)(2\gamma+k-1)\cdots\cdots(2\gamma+2)(2\gamma+1)}\beta_0\,x^k \tag{3.50}$$

となる．

これらの係数を持つ多項式 (3.31), (3.32) は合流型超幾何関数として知られている．合流型超幾何関数は $x \to \infty$ で発散する．束縛状態であるためには，その波動関数が規格化可能（全空間で積分可能で，積分値が有限）でなくてはならない．合流型超幾何関数の組み合わせで書かれた波動関数 (3.49), (3.50) は $x \to \infty$ で発散する．波動関数が規格化できるためには，多項式 (3.31), (3.32) が途中で切れて，$x \to \infty$ に対し $G(x) \to 0$, $F(x) \to 0$ とならなくてはならない．すなわち，ある k_0 よりも大きいすべての k に対して α_k と β_k が 0 にならなくてはならない．このためには (3.46), (3.48) の分子，または (3.49), (3.50) の分子を見ればわかるように

$$N + k_0 = 0 \tag{3.51}$$

となればよい．このとき，$\alpha_{k_0} = \beta_{k_0+1} = 0$ となる．ただし

$$k_0 = 0, 1, 2, 3, \cdots \tag{3.52}$$

である．

式 (3.47)

$$N = \frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} + \gamma = -k_0 \tag{3.53}$$

から

$$\frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} = -(k_0 + \gamma) \tag{3.54}$$

となるが，これを二乗して

$$(Z_S + WZ_V)^2 = \lambda^2 (k_0 + \gamma)^2 = (1 - W^2)(k_0 + \gamma)^2$$

これを整理すると

$$\{Z_V^2 + (k_0 + \gamma)^2\} W^2 + 2Z_S Z_V W + Z_S^2 - (k_0 + \gamma)^2 = 0$$

と W についての 2 次方程式となる．これを解くと

$$\begin{aligned} W &= \frac{-Z_S Z_V \pm \sqrt{Z_S^2 Z_V^2 - \{Z_V^2 + (k_0+\gamma)^2\}\{Z_S^2 - (k_0+\gamma)^2\}}}{Z_V^2 + (k_0+\gamma)^2} \\ &= \frac{-Z_S Z_V \pm (k_0+\gamma)\sqrt{(k_0+\gamma)^2 - Z_S^2 + Z_V^2}}{(k_0+\gamma)^2 + Z_V^2} \end{aligned} \tag{3.55}$$

故に，エネルギー固有値 E は

$$E = m\left\{\frac{-Z_S Z_V \pm (k_0+\gamma)\sqrt{(k_0+\gamma)^2 - Z_S^2 + Z_V^2}}{(k_0+\gamma)^2 + Z_V^2}\right\} \tag{3.56}$$

と求まる．条件式 (3.42)

$$\gamma^2 = \kappa^2 + (Z_S^2 - Z_V^2) \tag{3.57}$$

を使うと

$$
\begin{aligned}
E &= m\left\{\frac{-Z_S Z_V \pm (k_0+\gamma)\sqrt{(k_0+\gamma)^2+\kappa^2-\gamma^2}}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\} \\
&= m\left\{\frac{-Z_S Z_V \pm (k_0+\gamma)\sqrt{k_0^2+\kappa^2+2k_0\gamma}}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\}
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

とも書き換えられる.

3.3 γ の取り扱い

g と f の展開 (3.31), (3.32) で

$$g = x^{\gamma_1} \sum_{k=0} \alpha_k x^k \tag{3.59}$$

$$f = x^{\gamma_2} \sum_{k=0} \beta_k x^k \tag{3.60}$$

と異なる $\gamma(\gamma_1 \neq \gamma_2)$ を使うと, x^{γ_1} の項と x^{γ_2} の項は異なる次数となるので, (3.35) と (3.36) は

$$\sum_{k=0} \alpha_k(\gamma_1+k)x^{k-1} = \sum_{k=0} \alpha_k x^k + \frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1}$$

$$\kappa \sum_{k=0}\beta_k x^{k-1} = \frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\sum_{k=0}\beta_k x^{k-1}$$

$$\sum_{k=0}\beta_k(\gamma_2+k)x^{k-1} = -\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda}\sum_{k=0}\beta_k x^{k-1}$$

$$\kappa \sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1} = -\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}\sum_{k=0}\alpha_k x^{k-1}$$

と 4 つの独立な式になる. 第 2 式, 第 4 式から

$$\kappa = \frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}$$

$$\kappa = -\frac{WZ_S+Z_V}{\lambda}$$

となり, $\kappa \neq 0$ であるからこれが両立しないことは明らかである. 故に, g と f の展開 (3.31), (3.32) では共通の γ を使わなくてはならないことがわかる.

4 正則な解

原点 $r=0(x=0)$ で波動関数 (3.31) と (3.32) が発散しないような正則な解を得るためには $\gamma \geq 0$ でなければならない. 式 (3.43) より

$$\gamma = \sqrt{\kappa^2+(Z_S^2-Z_V^2)} \tag{4.1}$$

であり, また, $k_0 \geq 0(N \leq 0)$ であるから (3.54) 式から

$$\frac{Z_S+WZ_V}{\lambda} = -(k_0+\gamma) \leq 0 \tag{4.2}$$

である．

4.1　ベクトル型（$Z_S=0$）の場合

スカラーポテンシャルがなく，ベクトルポテンシャルのみの場合には，ポテンシャルはクーロンポテンシャルと呼ばれ，多くのテキストですでに相対論的な議論がなされている．

式（4.2）は

$$\frac{WZ_V}{\lambda} = -(k_0+\gamma) \leq 0 \tag{4.3}$$

となる．$\lambda=\sqrt{1-W^2}>0$ であるから，$Z_V<0$（引力）の場合には$W=E/m$は正，すなわち固有エネルギーEは正となる．

エネルギー固有値は（3.56）式から正符号を選んで

$$\begin{aligned} E &= m\left\{\frac{(k_0+\gamma)\sqrt{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\} \\ &= m\left\{\frac{(k_0+\gamma)}{\sqrt{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}}\right\} \\ &= m\left\{1+\frac{Z_V^2}{(k_0+\gamma)^2}\right\}^{-1/2} \qquad (4.4) \\ &= m\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^2+\frac{3}{8}\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^4-\cdots\cdots\right\} \qquad (4.5) \end{aligned}$$

となる．最後の式（4.5）の展開の第2項は非相対論的に求めた通常の束縛エネルギーに対応する．第1項は静止質量であり，第3項以下が相対論的な補正と考えられる．もちろん$E<m$である．

逆に，$Z_V>0$（斥力）の時にはWは負になり，固有エネルギーEは

$$E = -m\left\{1+\frac{Z_V^2}{(k_0+\gamma)^2}\right\}^{-1/2} \tag{4.6}$$

となる．この解は相対論に特徴的な解で，すでに解説した荷電対称性によるものである．通常の真空状態ではこれらの状態はすべて埋まっているものと解釈される．この状態に空孔があいた状態は，反符号のエネルギーをもつ（$E>0$）反粒子が存在する状態であるとみなされる．

すなわち，相対論的には引力に対しても斥力に対しても同じく束縛状態の解が存在し，同じ大きさで反符号のエネルギーを持つ．

式（4.1）は

$$\gamma=\sqrt{\kappa^2-Z_V^2}>0 \tag{4.7}$$

となり，

$$Z_V^2 \leq \kappa^2 \tag{4.8}$$

という条件がつき，Z_V の大きさにより，存在する状態の角運動量の下限が決まる．

$\gamma=0,\ k_0=0$ の場合には，(4.3) より $W=0$ すなわち $E=0$ となる解が存在するかのように見える．(4.1) 式で κ は整数であるから

$$Z_V^2=\kappa^2=1,4,9,\cdots \tag{4.9}$$

となり，この条件を満たす特別な大きさを持つポテンシャルの場合のみこのような解が存在する．

4.2 スカラー型 ($Z_V=0$) の場合

ベクトルポテンシャルが存在しない場合には，式 (4.2) は

$$\frac{Z_S}{\lambda}=-(k_0+\gamma)\leq 0 \tag{4.10}$$

となり，$\lambda=\sqrt{1-W^2}>0$ であるから，この条件を満足するには $Z_S<0$ で，引力のスカラーポテンシャルの場合にしか束縛状態の解は存在しない．

エネルギー固有値は (3.56) 式から

$$E=\pm m\sqrt{1-\frac{Z_S^2}{(k_0+\gamma)^2}} \tag{4.11}$$

$$=\pm m\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{Z_S}{k_0+\gamma}\right)^2-\frac{1}{8}\left(\frac{Z_S}{k_0+\gamma}\right)^4-\cdots\cdots\right\} \tag{4.12}$$

となる．もちろん $|E|<m$ である．

展開の第 2 項まではベクトル型の場合と一致するが，第 3 項以下の相対論的補正項が異なる．

解が存在するためには (4.11) 式の根号の中が正でなければならないから

$$(k_0+\gamma)^2\geq Z_S^2 \tag{4.13}$$

という条件がつく．これは $Z_S<0$ を考えると

$$0>Z_S\geq-(k_0+\gamma) \tag{4.14}$$

となる．また (3.43) より

$$\gamma=\sqrt{\kappa^2+Z_S^2}\geq 0 \tag{4.15}$$

であるが，$\kappa=-1,-2,+1,-3,+2,\cdots\cdots$ であるから ($\kappa^2\geq 1$)

$$\gamma>1 \tag{4.16}$$

である．

エネルギー固有値として正負の解が現れるのは，荷電対称性によるものである．すなわち，相対論的には引力に対してのみ束縛状態の解が存在し，同じ大きさで反符号のエネルギーを持つ解 (反粒子解) が存在する．負のエネルギー固有値を持つ状態も $k_0=0,1,2,3,\cdots$ であるから無限個存在する．このような状態が存在すれば系は非常に不安定になるが，通

常はこれらの状態がすべて埋まった状態が真空状態であるとみなされている．パウリ原理からフェルミ粒子は同じ状態には複数個の粒子が存在することはできないから，真空状態に1つのフェルミ粒子が加えられ，引力ポテンシャルを受けると，その粒子は $E>0$ の束縛状態にしか存在できないことになる．

4.3 $|\boldsymbol{Z_S}| = |\boldsymbol{Z_V}|$ の場合

式（3.42）から $|Z_S| = |Z_V|$ の場合には

$$\gamma = \pm\kappa \tag{4.17}$$

となるが，$-\dfrac{1}{2} < \gamma$ であり，$\kappa = -1, -2, +1, -3, +2, \cdots\cdots$ であるから，

$$\gamma = |\kappa| = 1, 2, 3, \cdots\cdots \tag{4.18}$$

とならなければならない．$-\dfrac{1}{2} < \gamma < 1$ の解は存在せず，必ず正則な解となる．

エネルギー固有値は（3.56）より

$$E = m\left\{\frac{-Z_S Z_V \pm (k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2 + Z_V^2}\right\} \tag{4.19}$$

となる．

同符号 $Z_S = Z_V$ の場合には

$$E = m\left\{\frac{-Z_V^2 \pm (k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2 + Z_V^2}\right\}$$

$$= -m,\ m\left\{\frac{-Z_V^2 + (k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2 + Z_V^2}\right\} \tag{4.20}$$

$$= -m,\ m\left\{1 - 2\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^2 + 2\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^4 - \cdots\cdots\right\} \tag{4.21}$$

である．ただし（3.54）式から $\gamma \geq 1$ を考慮すると

$$\frac{(1+W)Z_V}{\lambda} = -(k_0+\gamma) < 0 \tag{4.22}$$

を満たさなければならない．引力（$Z_V < 0$）の場合には

$$1 + W > 0 \tag{4.23}$$

すなわち

$$W = \frac{E}{m} > -1$$

$$E > -m \tag{4.24}$$

となる．同じく，斥力（$Z_V > 0$）の場合には

$$1 + W < 0 \tag{4.25}$$

すなわち

$$W=\frac{E}{m}<-1$$
$$E<-m \tag{4.26}$$

とならなければならない．すなわち，(4.20) の 1 番目の解 $E=-m$ は存在しない．

引力の場合の条件は，(4.20) と (4.24) から

$$\frac{-Z_V^2+(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}>-1 \tag{4.27}$$

とならなければならないが，これを整理すると

$$2(k_0+\gamma)^2>0 \tag{4.28}$$

となり，常に満足することがわかる．すなわち，引力の場合には $m>E>-m$ の解が存在する．

斥力の場合の条件は

$$\frac{-Z_V^2+(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}<-1 \tag{4.29}$$

となり

$$2(k_0+\gamma)^2<0 \tag{4.30}$$

が求まるが，これを満たすことはできない．すなわち，斥力の場合には束縛状態の解は存在しない．以上まとめると，$Z_S=Z_V<0$ の場合のみ束縛状態の解が存在し，その固有エネルギーは

$$E=m\left\{\frac{-Z_V^2+(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\} \tag{4.31}$$

である．

反符号 $Z_S=-Z_V$ の場合には (4.19) より

$$\begin{aligned}E&=m\left\{\frac{Z_V^2\pm(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\}\\&=m,\ -m\left\{\frac{-Z_V^2+(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\} \qquad (4.32)\\&=m,\ -m\left\{1-2\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^2+2\left(\frac{Z_V}{k_0+\gamma}\right)^4-\cdots\cdots\right\} \qquad (4.33)\end{aligned}$$

となる．条件は (3.54) は

$$\frac{(-1+W)Z_V}{\lambda}=-(k_0+\gamma)<0 \tag{4.34}$$

となり，$Z_V<0$ の場合には

$$-1+W>0 \tag{4.35}$$

すなわち

$$E>m \tag{4.36}$$

$Z_V>0$ の場合には

$$-1+W<0 \tag{4.37}$$

すなわち

$$E<m \tag{4.38}$$

となる．(4.32) の1番目の解 $E=m$ は存在しない．

$Z_V<0$ の場合の条件は，(4.32) と (4.36) から

$$\frac{Z_V^2-(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}>1 \tag{4.39}$$

すなわち

$$2(k_0+\gamma)^2<0 \tag{4.40}$$

となり，満足することはできない．すなわち，引力のベクトルポテンシャルと斥力のスカラーポテンシャルで大きさが等しい場合には束縛状態は存在しない．

$Z_V>0$ の場合の条件

$$\frac{Z_V^2-(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}<1 \tag{4.41}$$

は

$$2(k_0+\gamma)^2>0 \tag{4.42}$$

となり，常に成り立つ．すなわち，斥力のベクトルポテンシャルと引力のスカラーポテンシャルで大きさが等しい場合 ($Z_S=-Z_V<0$) には束縛状態は存在し，$m>E>-m$ となる．これは $Z_S=Z_V<0$ の場合の荷電対称な解となっている．固有エネルギーは

$$E=-m\left\{\frac{-Z_V^2+(k_0+\gamma)^2}{(k_0+\gamma)^2+Z_V^2}\right\} \tag{4.43}$$

であり，(4.31) の反符号である．

5 非正則な解

次に，波動関数が原点で発散する非正則な解を検討する．すなわち $0>\gamma>-\frac{1}{2}$ の場合を考える．(3.43) は

$$\gamma=-\sqrt{\kappa^2+(Z_S^2-Z_V^2)} \tag{5.1}$$

となる．$|\kappa| \geq 1$ だから，$Z_S^2 - Z_V^2 \geq 0$ ならば $\gamma \leq -1$ となってしまい，原点で積分不可能となる．そのため，$Z_S^2 < Z_V^2$ の場合にしか非正則な解は存在できない．すなわちスカラーポテンシャルだけの場合には非正則解は存在しない．また $Z_S^2 = Z_V^2$ でも非正則解は存在しない．

（3.54）式

$$\frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} = -(k_0 + \gamma) \tag{5.2}$$

の右辺の符号は $k_0 = N = 0$ の場合のみ正となるが，$k_0 \geq 1 (N \leq -1)$ では負となる．そこで $k_0 = N = 0$ の場合と $k_0 \geq 1 (N \leq -1)$ の場合を分けて議論する．

まず γ が負で，N が 0 である場合を考える．この時（3.54）式は

$$\gamma = -\frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} \tag{5.3}$$

となり，（3.48）と（3.46）から β_0 以外のすべての α_k，β_k が 0 となる．それ故，波動関数（3.23），（3.24）は

$$G(x) = \sqrt{1+W}\,\beta_0 x^\gamma e^{-\frac{x}{2}} \tag{5.4}$$

$$F(x) = -\sqrt{1-W}\,\beta_0 x^\gamma e^{-\frac{x}{2}} \tag{5.5}$$

となる．β_0 は規格化によって決められる定数である．

エネルギー固有値は（3.56）で $k_0 = 0$ として

$$E = m\left(\frac{-Z_S Z_V \pm \gamma\kappa}{\gamma^2 + Z_V^2}\right) \tag{5.6}$$

である．

次に γ が負で，$N \leq -1 (k_0 \geq 1)$ の場合には（3.54）式より

$$\frac{Z_S + WZ_V}{\lambda} = N - \gamma \leq 0 \tag{5.7}$$

となり，正則解と同じ条件になる．（3.56）で与えられる一連の固有エネルギーをもつ非正則解が得られる．

5.1 ベクトル型（$Z_S = 0$）の場合

この条件での非正則解についてはすでに JJIAM や紀要に議論が存在するが，ここにまとめておく．

$N = 0$ の場合には，（5.6）式は，条件式（3.42）

$$\gamma^2 = \kappa^2 - Z_V^2 \tag{5.8}$$

を使って

$$E = \pm m\frac{\sqrt{\kappa^2(\kappa^2 - Z_V^2)}}{\kappa^2}$$

$$= \pm m\sqrt{1-\left(\frac{Z_V}{\kappa}\right)^2} \tag{5.9}$$

$$= \pm m\left|\frac{\gamma}{\kappa}\right| \tag{5.10}$$

となる．(5.3) 式より

$$\frac{WZ_V}{\lambda} > 0 \tag{5.11}$$

であるから，斥力（$Z_V > 0$）の場合に正のエネルギー（$W > 0$）

$$E = m\sqrt{1-\left(\frac{Z_V}{\kappa}\right)^2} \tag{5.12}$$

が求まり，引力（$Z_V < 0$）の場合に負のエネルギー（$W < 0$）

$$E = -m\sqrt{1-\left(\frac{Z_V}{\kappa}\right)^2} \tag{5.13}$$

が求まる．やはり解は対称的に求まるが，この場合には斥力ポテンシャルに対して，正で静止質量 m より小さな固有値が求まることに注目すべきである．

波動関数 (5.4) と (5.5) は全空間で積分可能で規格化できるが，$\gamma < 0$ の場合は，原点 $x = 0$ で発散する．このような非正則解は通常の正則な解の議論からははずされるが，距離に逆比例するような原点で正則でないポテンシャルを問題とする場合には検討する価値があるであろう．

条件 $0 > \gamma > -\frac{1}{2}$ と (5.1) から

$$-\sqrt{\kappa^2 - Z_V^2} > -\frac{1}{2} \tag{5.14}$$

となるが，この条件式は

$$|\kappa| > |Z_V| > \sqrt{\kappa^2 - \frac{1}{4}} \tag{5.15}$$

と書き変えられる．もし疑似水素原子の問題として $Z_V = Z\alpha$ で $|\alpha| = e^2 = \frac{1}{137}$ ととると，条件式 (5.15) を満たす原子番号 Z は $\kappa = \pm 1$ に対して

$$137 \geq Z \geq 119 \tag{5.16}$$

$\kappa = \pm 2$ に対しては

$$274 \geq Z \geq 266 \tag{5.17}$$

となる．現実の元素には対応しない大きな原子番号である．

$N \neq 0(N \leq -1)$ の場合には，式 (4.4)，(4.6) で与えられるエネルギー固有値解となるから，斥力クーロンポテンシャルの場合，非正則解では第一状態 $k_0 = 0$ の場合に

$$E = m\sqrt{1-\left(\frac{Z_V}{\kappa}\right)^2} > 0 \tag{5.18}$$

と正のエネルギーの解となり，第二状態以上 $k_0 \geq 1$ の場合には

$$E = -m\left\{1+\frac{Z_V^2}{(k_0+\gamma)^2}\right\}^{-1/2} \tag{5.19}$$

と負のエネルギーの解となる．(5.19) 式で $k_0 = 0$ とし，符号を変えれば (5.18) になることは明かであろう．

引力の場合には符号の反対の解が現れる．すなわち，基底状態は負のエネルギーをもち，第一励起状態以上はすべて正のエネルギーをもつ．これら非正則解が存在する条件は (5.16)，(5.17) などをみたすような大電荷の場合である．

6 まとめと分析

距離に逆比例するポテンシャル（スカラー型およびベクトル型）をもつ Dirac 方程式は解析的に解け，そのエネルギー固有値は (3.56) で与えられる．

波動関数が原点で発散しない正則な解としては，引力型のベクトルポテンシャルに対しては $0< E < m$ の正の固有エネルギーが得られ，斥力型のベクトルポテンシャルに対しては $-m < E < 0$ の負の固有エネルギーが得られる．スカラーポテンシャルに対しては引力の場合にしか束縛解は存在せず，$0 < E < m$ と $-m < E < 0$ の解が対称的に求まる．それ以外にはベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルの大きさが等しく，ともに引力の場合に正の固有エネルギーが，斥力のベクトルポテンシャルと引力のスカラーポテンシャルの場合にそれとは反符号の負の固有エネルギーを持つ束縛状態が存在する．

原点で波動関数が発散する非正則な解としてはベクトルポテンシャルの大きさがスカラーポテンシャルより大きい場合のみ存在し，$k_0 = 0$ の場合のみ正則な解とは逆の符号を持つエネルギー状態が存在する．この状況は相対論に特有なものなので，少し詳しく議論しよう．

運動方程式 (3.5)，(3.6) を書き直すと

$$[\{E-V(r)\}-\{m+S(r)\}]G(r) = -\frac{dF(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}F(r) \tag{6.1}$$

$$[\{E-V(r)\}+\{m+S(r)\}]F(r) = \frac{dG(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}G(r) \tag{6.2}$$

となる．式 (6.2) から $F(r)$ を求めて

$$F(r) = \frac{1}{\{E-V(r)\}+\{m+S(r)\}}\left\{\frac{dG(r)}{dr}+\frac{\kappa}{r}G(r)\right\} \tag{6.3}$$

これを，(6.1) に代入し，$F(r)$ を消去し，整理すると $G(r)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2}=\left[\frac{\dfrac{dS(r)}{dr}-\dfrac{dV(r)}{dr}}{\{E-V(r)\}+\{m+S(r)\}}\right]\frac{dG(r)}{dr}-\left[\{E-V(r)\}^2-\{m+S(r)\}^2\right]G(r)$$

$$+\frac{\kappa}{r}\left[\frac{1+\kappa}{r}+\frac{\dfrac{dS(r)}{dr}-\dfrac{dV(r)}{dr}}{\{E-V(r)\}+\{m+S(r)\}}\right]G(r) \tag{6.4}$$

が求まる．

全エネルギー E を静止質量 m とそれ以外のエネルギー $\mathcal{E}$ に分け ($E=\mathcal{E}+m$)，非相対論的近似 $|\mathcal{E}|\ll m$ を使うと，上成分 $G(r)$ に関する方程式 (6.4) は

$$\frac{d^2G(r)}{dr^2}=\frac{1}{2m+S(r)-V(r)}\left\{1-\frac{\mathcal{E}}{2m+S(r)-V(r)}\right\}\left\{\frac{dS(r)}{dr}-\frac{dV(r)}{dr}\right\}\frac{dG(r)}{dr}$$

$$-\left[2m\mathcal{E}+\mathcal{E}^2-2m\{V(r)+S(r)\}-2\mathcal{E}V+V(r)^2-S(r)^2\right]G(r)$$

$$+\frac{\kappa}{r}\left[\frac{1+\kappa}{r}+\frac{1}{2m+S(r)-V(r)}\left\{1-\frac{\mathcal{E}}{2m+S(r)-V(r)}\right\}\right.$$

$$\left.\times\left\{\frac{dS(r)}{dr}-\frac{dV(r)}{dr}\right\}\right]G(r) \tag{6.5}$$

となる．この式を整理すると

$$-\frac{1}{2m}\frac{d^2G(r)}{dr^2}+\frac{1}{2m\{2m+S(r)-V(r)\}}\left\{1-\frac{\mathcal{E}}{2m+S(r)-V(r)}\right\}$$

$$\times\left\{\frac{dS(r)}{dr}-\frac{dV(r)}{dr}\right\}\frac{dG(r)}{dr}$$

$$+\left\{V(r)+S(r)-\frac{V(r)^2-S(r)^2}{2m}-\frac{\mathcal{E}^2}{2m}\right\}G(r)$$

$$+\left[\frac{1}{2m}\frac{\ell(1+\ell)}{r^2}+\frac{\kappa}{r}\frac{1}{2m\{2m+S(r)-V(r)\}}\right.$$

$$\left.\times\left\{1-\frac{\mathcal{E}}{2m+S(r)-V(r)}\right\}\left\{\frac{dS(r)}{dr}-\frac{dV(r)}{dr}\right\}\right]G(r)$$

$$=\mathcal{E}\left\{1-\frac{V(r)}{m}\right\}G(r) \tag{6.6}$$

となる．ここで $\kappa=\mp\left(j+\dfrac{1}{2}\right)$ を考慮して $\kappa(1+\kappa)=\ell(1+\ell)$ と書き直してある．$|\mathcal{E}|\ll m$ を使ってさらに整理すると非相対論的な Schrödinger 方程式に対応する運動方程式

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\frac{d^2G(r)}{dr^2}+\frac{\dfrac{dS(r)}{dr}-\dfrac{dV(r)}{dr}}{2m\{2m+S(r)-V(r)\}}\left\{\frac{dG(r)}{dr}-\frac{G(r)}{r}\right\}\\
&\qquad+\left\{V(r)-\frac{V(r)^2}{2m}+S(r)+\frac{S(r)^2}{2m}\right\}G(r)\\
&\qquad+\frac{1}{2m}\frac{\ell(1+\ell)}{r^2}G(r)+\frac{\kappa+1}{r}\frac{\dfrac{dS(r)}{dr}-\dfrac{dV(r)}{dr}}{2m\{2m+S(r)-V(r)\}}G(r)\\
&\quad=\mathcal{E}G(r)
\end{aligned}
\tag{6.7}
$$

が求まる．

距離に逆比例するポテンシャル

$$
\begin{aligned}
S(r)&=\frac{Z_S}{r}\\
V(r)&=\frac{Z_V}{r}
\end{aligned}
\tag{6.8}
$$

を代入すると

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2m}\frac{d^2G(r)}{dr^2}+\frac{-\dfrac{Z_S}{r^2}+\dfrac{Z_V}{r^2}}{2m\left(2m+\dfrac{Z_S}{r}-\dfrac{Z_V}{r}\right)}\left\{\frac{dG(r)}{dr}-\frac{G(r)}{r}\right\}\\
&\qquad+\left(\frac{Z_V}{r}-\frac{Z_V^2}{2mr^2}+\frac{Z_S}{r}+\frac{Z_S^2}{2mr^2}\right)G(r)\\
&\qquad+\frac{1}{2m}\frac{\ell(1+\ell)}{r^2}G(r)+\frac{\kappa+1}{r}\frac{-\dfrac{Z_S}{r^2}+\dfrac{Z_V}{r^2}}{2m\left(2m+\dfrac{Z_S}{r}-\dfrac{Z_V}{r}\right)}G(r)\\
&\quad=\mathcal{E}G(r)
\end{aligned}
\tag{6.9}
$$

となる．左辺の第 1 項は運動エネルギーに相当する項である．第 2 項は速度に依存する項であり，第 3 項は相対論的効果を含んだポテンシャルである．第 4 項は遠心力ポテンシャル，第 5 項が LS 力である．

非相対論の Schrödinger 方程式と比較すると，最大の違いは第 3 項のポテンシャル項に対する相対論的効果であることがわかる．ポテンシャルの一乗の項は導入されたポテンシャルの符号がそのまま反映されるが，二乗の項はベクトルポテンシャルは常に負で引力的に，スカラーポテンシャルは常に正で斥力的に働くことがわかる．ベクトルポテンシャルの大きさが大きいと原点付近でこの項が優勢になり，大きな引力をもたらす．このため，斥力的なベクトルポテンシャルの場合にも束縛解が存在する可能性がでてくる．これがベ

クトル型には非正則な束縛状態が存在し，斥力の場合にも $0<E<m$ の解が存在しうる理由である．スカラー型ではこの二乗項が斥力的に働くため，引力の場合にしか束縛解は存在せず，また非正則解も存在しない．

参考文献

Bethe, H. A. and R. W. Jackiw (1986) Intermediate quantum mechanics. Addison-Wesley Pub. Comp. (Massachusetts).

Bethe, H. A. and E. E. Salpeter (1957) Quantum mechanics of one- and two-electron atoms. Springer-Verlag (Berlin).

Bjorken, J. D. and S. D. Drell (1964) Relativistic quantum mechanics. McGraw-Hill Book Co. (New York).

Brysk, H. and P. F. Zweifel (1981) Possible bound states of repulsive potentials. Phys. Rev., C23 : 968-972.

Coutinho, F. A. B., Y. Nogami and J. F. Perez (1992) Self-adjoint extentions of the Hamiltonian for a charged particle in the presence of a thread of magnetic flux. Phys. Rev., A46 : 6052-6055.

Coutinho, F. A. B., Y. Nogami, J. F. Perez and F. M. Toyama (1994) Self-adjoint extentions of the Hamiltonian for a charged spin-1/2 particle in the Aharonov-Bohm field. J. Phys., A27 : 6539-6550.

Itzykson, C. and J.-B. Zuber (1985) Quantum field theory. McGraw-Hill Book Co. (New York).

Klaus, M. and R. Wüst (1979) Spectral properties of Dirac operators with singular potentials. J. Math. Anal. Appl., 72 : 206-214.

Messiah, A. (1962) Quantum mechanics. North-Holland (Amsterdam).

Popv, V. S. (1971) On the properties of the discrete spectrum for Z close to 137. Soviet Phys. JETP, 33 : 665-673.

Rose, M. E. (1961) Relativistic electron theory. Jhon Wiley and Sons, Inc. (New York).

Schmincke, U.-W. (1972) Essential selfadjointness of Dirac operators with a strongly singular potential. Math. Z., 126 : 71-81.

Schmincke, U.-W. (1972) Distinguished selfadjoint extentions of Dirac operators. Math. Z., 129 : 335-349.

Tezuka, H. (1997) Positive energy bound state solutions in relativistic Coulomb potential, Japan J. Ind. Appl. Math., 14 : 39-50.

Thaller, B. (1992) The Dirac equation. Springer-Verlag (Berlin).

Wüst. R. (1975) Distinguished self-adjoint extentions of Dirac operators constructed by means of cut-off potentials. Math. Z., 141 : 93-98.

手塚洋一 (1995) 斥力クーロン場における束縛状態. 東洋大学紀要 教養課程篇（自然科学）第39号 : 1-12.

森田正人, 森田玲子 (1988) 相対論的量子力学. 共立出版（東京).