

算額 (その8)*

——高砂神社への算額奉納——

米 山 忠 興**

Historical Japanese Geometry on Votive Tablets (8)

—Problem No.3 Dedicated to the Takasago Shrine—

Tadaoki YONEYAMA

平成 12 年の冬、兵庫県の高砂神社に、宮司の小松守道氏の協力を得て三問からなる算額を奉納し、前号の紀要に報告した (『算額 (その7)』)。

奉納した三問のうち、第一問はかんたんだから、とくに解説の必要もないと思われる。第二問は、これに関連する事項や問題点がたくさん有るので、解説・解答は次号以降に「あとまわし」にして、取り敢えず、今回は第三問だけの解答を示す。

次ページの図 1 に、その奉納算額の第三問および奥書の部分を再掲する。

高砂神社奉納算額第三問のもとになった、明治九年に生石神社に奉納された算額の第五問を、出題者の師による前文も併せて、あとの [Appendix 1] に示した。生石神社の第一問～第四問については、問題および術文などに若干の疑義があり、数学的レベルもそれほど高くはないので、今回はそれには触れないことにする。

この問題を初めて生石神社で見たときには、かなりの難問で計算も大変であろう、と予想され、実さいに、なかなか解けなかった。しかし、あとに示すように、反転法を用いることに気がついたあとは、いとも簡単に解決してしまった。そこで、多少挑発的かも知れないが、「これを簡単に解けますか？」ということで、再び出題した。

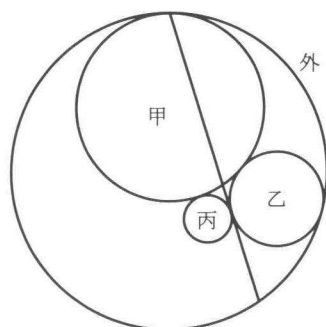
ただし、問題を作った藤代清之助および彼の師である佐藤善一郎の時代には、反転法は伝わっていなかったであろうから、彼らはたぶん、三角比と矩合 (方程式) によって、大変な計算をしながら解いたものと思われる。私も、もし反転法による解法を見つけることが

*この研究の一部は、平成 13 年度 東洋大学特別研究 (個人研究) 「算額の数学史・文化史的な調査・研究」による。

**東洋大学自然科学研究室 〒351-8510 埼玉県朝霞市岡 2-11-10

Natural Science Laboratory, Toyo University 11-10, Oka 2, Asaka-shi, Saitama, 351-8510 Japan.

「高砂神社 奉納算額 第三問」



今有如圖外圓內設斜容甲乙丙圓
則斜交外甲圓周一相交而乙圓者
甲圓與外圓周切又以丙圓挾斜其
兩圓乎甲圓相親只云外經若干甲
經若干乙經若干問丙經術如何

答曰 如左術

術曰置外甲差倍之內減乙名天自之內減乙冪

開平方以減天餘乘外以甲除得丙經合問

此題者 明治丙子年 備中國藤代清之助氏所造而懸乎石子

寶殿 吾人 已答之以簡潔的術焉今亦問其術

平成上章執徐仲冬穀旦

東都 保谷住

東洋大学 米山忠興
高砂神社 小松守道
謹識 敬白

図 1

出来なかったならば、それまで失敗を繰り返していた大変な計算をさらに押し進めて解いたかも知れない [Appendix 4: 第二余弦定理による解法]。しかし、いったん簡潔な、楽な方法で解いてしまうと、これからさらに苦勞して大変な計算に挑戦する気力が無くなってしまう。(高校の数学の授業で、問題を解くために努力するのはいいけれど、計算はなるべく「怠けて」、少ない計算で済ませなさいと教わった記憶がある。かんたんな計算で済めば、計算ミスも少なく、また「エレガント」でもある)

解法は他にもあると思われるが、算額文中にも書いたように、以下に示す解法は、たぶん、最も簡潔な解法、或いはその一つであろうと思われる。実さいに、この解法を見つけたときには、あまりの簡潔さに驚いたほどだった。

また、後段 (b) の計算は、結果を予測すれば、[Appendix 3] に示す計算例よりは、もう少し簡単になるかも知れない。

[高砂神社 奉納算額 第三問 解答]

高砂神社 第三問

図 1 のように、外円に甲円が内接している。その接点を通る任意の弦を引き、その三者に接する乙円を描く。さらに、弦に関して乙円と反対側で、甲円と乙円に接する丙円を描く（すなわち、弦と乙円と丙円は、共通の接点を持っている）。

ここで、外、甲、乙円の径（さしわたし：直径）が与えられたときに、丙円の径を求めよ。

高砂神社奉納算額の問題の中で、最も難しいのはこの第三問（生石神社の第五問）であり、算額の問題文・術文は、前ページの図 1（生石神社は後の図 4）のようである。しかし、後に示すように、これはかなり難問であり、出てくる答もあまりきれいなものではない。

そこで、この問題を以下のように、前段と後段とに分けて考える。

このうち、前段部分 (a) は、すっきりとした証明問題になる。後段 (b) は、面倒ではあるが、単なる計算問題である。

第三問（前段：a）

図 1 において、乙円と丙円の共通接線のうち、外円と甲円の接点から遠い方の接線は、外円と甲円の中心を通る直線に垂直であることを示せ。

第三問（後段：b）

丙円の径を求めよ。

この問題を、反転法によって解く。

以下では、図 2 のように

$$\begin{aligned} \text{外円} &= O(R), \quad \text{甲円} = O_1(a), \\ \text{乙円} &= O_2(b), \quad \text{丙円} = O_3(r) \text{ とおく。} \end{aligned}$$

また、円 $O(R)$ と円 $O_1(a)$ の接点を T 、円 $O_2(b)$ と円 $O_3(r)$ の接点を C とする。

T を中心とし、 $TC = k$ を半径とする円で反転を行う。

（『算額（その 4）—— 反転法 ——』の性質を参照）

一般に、点 P が点 P' に反転されるとすると、 $TP \cdot TP' = k^2$ が成り立つ。（反転法）

直線 TC 、円 $O_2(b)$ 、円 $O_3(r)$ は反転に対して不変である。（性質 II, VI）

また、円 $O(R)$ と円 $O_1(a)$ はともに直線 TO に関して対称だから、それぞれ、 TO に垂直な直線 $\ell(O)$ 、 $m(O_1)$ に反転される。（性質 IV 及び VII）

それらと直線 TO の交点を、それぞれ、 D 、 E とする。

円 $O_2(b)$ は、元は円 $O(R)$ 、円 $O_1(a)$ 、直線 TC に接していたから、反転後は、直線 $\ell(O)$ 、 $m(O_1)$ 、 TC に接しているはずである。

また、円 $O_3(r)$ は、元は円 $O_1(a)$ 、円 $O_2(b)$ 、直線 TC に接していたから、反転後は、 $m(O_1)$ 、円 $O_2(b)$ 、直線 TC に接しているはずである。

この結果、第 3 問の (a) は、かんたんに証明された [Appendix 2：不動円]。

[反転法による解答図]

T を中心として，太い点線 (-----) で表わされた「反転円」によって反転すると，円 $O_2(b)$ と 円 $O_3(r)$ は不動円であり，直線 TC, TE も不変である．

反転の前後で，図中の

円 $O(R)$ \longleftrightarrow 直線 $\ell(O)$

円 $O_1(a)$ \longleftrightarrow 直線 $m(O_1)$

及び同種の点に対応している．

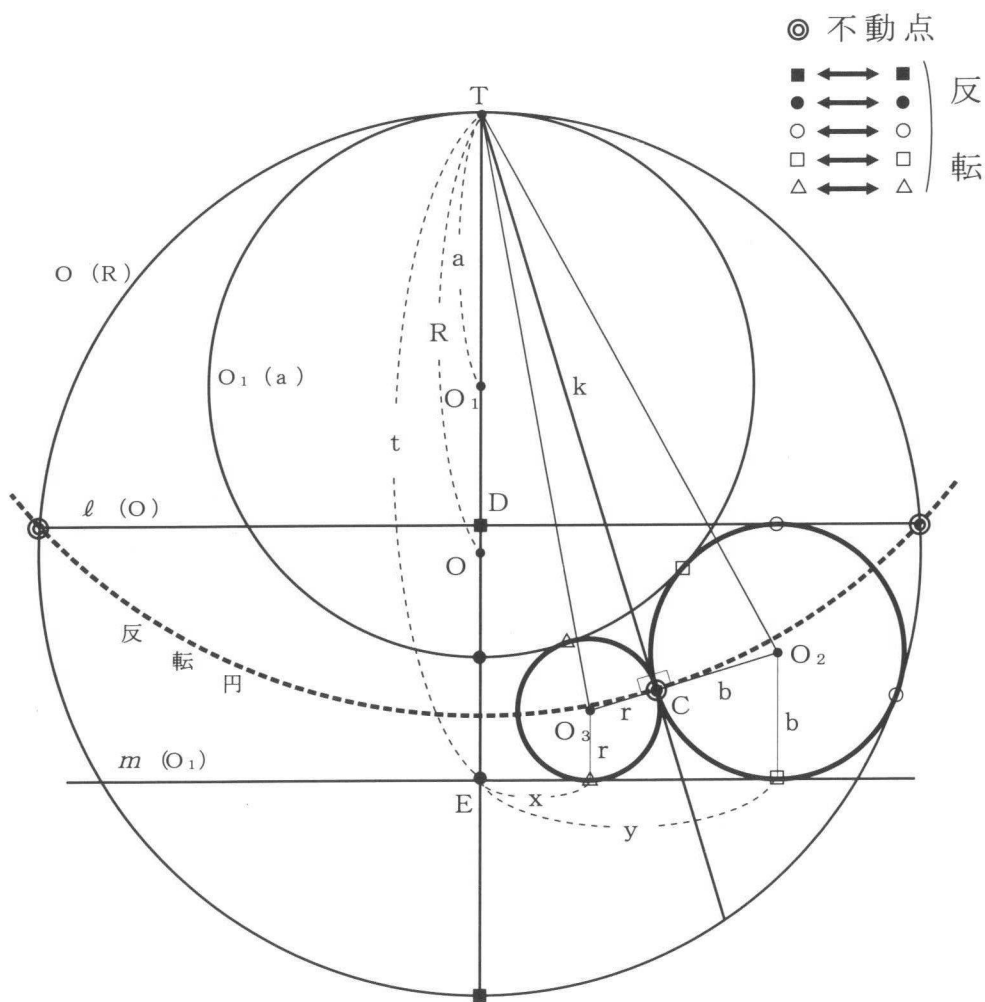


図 2

次に、第 3 問の (b) を解く。

はじめに、反転に関して、 $TD \cdot 2R = k^2$, $TE \cdot 2a = k^2$.

$$2b = DE = TE - TD = \frac{k^2}{2a} - \frac{k^2}{2R}$$

$$\therefore b = \frac{k^2}{4} \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R} \right) \quad ①$$

点 O_3 と点 O_2 の直線 TO からの距離を、それぞれ、 x , y とおけば、

$$(y - x)^2 + (b - r)^2 = (b + r)^2. \quad ②$$

また、 $\triangle TCO_2$ と $\triangle TCO_3$ において、

$$\begin{cases} k^2 + b^2 = (TE - b)^2 + y^2 & ③ \\ k^2 + r^2 = (TE - r)^2 + x^2 & ④ \end{cases}$$

ただし、 TE は k を用いて表わすことが出来る。この結果、変数 x , y , k , r に関する 4 つの方程式が得られた。これらを解いて、 r を求めると、

$$\therefore r = \frac{R}{a} \left[\{2(R - a) - b\} - \sqrt{\{2(R - a) - b\}^2 - b^2} \right]$$

となる。[Appendix 3]

算額に与えられている術文は、

$$\begin{aligned} &(\text{外} - \text{甲}) \times 2 - \text{乙} = \text{天}, \\ &\left\{ \text{天} - \sqrt{\text{天}^2 - \text{乙}^2} \right\} \times \frac{\text{外}}{\text{甲}} = \text{丙}, \end{aligned}$$

すなわち

$$\text{丙} = \frac{\text{外}}{\text{甲}} \times \left[\{2 \times (\text{外} - \text{甲}) - \text{乙}\} - \sqrt{\{2 \times (\text{外} - \text{甲}) - \text{乙}\}^2 - \text{乙}^2} \right].$$

である。ここで、

$$\text{外} = 2R$$

$$\text{甲} = 2a$$

$$\text{乙} = 2b$$

$$\text{丙} = 2r$$

とおくと、

$$r = \frac{R}{a} \left[\{2(R - a) - b\} - \sqrt{\{2(R - a) - b\}^2 - b^2} \right]$$

となって、術文が正しいことがわかる。

[Appendix 1] 生石神社算額の前文と第五問

生石神社 オイシコ

所謂禮射御書数之六藝ハ人タルモノ嗜ム イフユル リクゲイ タシナ
 ヘキ至要也中ニ数ノ徳タルヤ日月星辰天
 地万物アルトアラユルモノ一トシテ数ニ
 ヨラサルハナシ嗟呼其用大ナル哉至レル哉 カナ
 茲ニ予門人貳参子相共ニ謀リ算術測量題 ココ フレ
 自問自答ヲ設ケ石子寶殿廣前ニ捧ケ此道 ホウデン
 ノ榮事ヲ祈ル唯諸君ノ嘲ケリヲ恥チ又ハ サカユル タダ アザ
 自ラ矜ルノ志ナルヘシト指ササレン事ヲ ホコ
 恐ル況固ヨリ本志ハ誠敬之情ヲ盡ス而已 イワンヤモト ノミ
 人々術ノ陋拙ヲ以テ本志ヲ害スル事ナカ ロウセツ
 レト云爾敬一言加ユル賛哉 シカイウシヨマリテ カナ

山陽備中後月郡井原住

佐藤善一郎 貞次 関

図 3 (ルビは筆者)

第1行目の「所謂禮射御書数之六藝」の「六藝」に、「楽」が抜け落ちている。たぶん、算額に書き写したときの誤りであろう。

ところで、前号の『算額(その7)——高砂神社への算額奉納——』で、「生石子神社」と書いたところ、「生石神社」ではないかというクレームが寄せられた。訓は「おうしこ」又は「おいしこ」で、算額の前文には唐風に「石子寶殿」(*)と記されていて、地元の人でも「おうしこさん」と呼んでいるので、前号では「生石子」としてしまった。少なくとも文献では「生石」か、あるいは「石子」と書かれているようである。

(*) 生石神社は、岩山の上にあり、あきらかに人間の手で加工され、これからたぶん古墳の石室あるいは石棺に利用するための、一辺が5メートルくらいある大きな岩が切り出されようとしている(『播磨風土記』を参照)。また、その岩山全体も御神体であったので、「石子寶殿」と呼んだものであろう。

生石神社 第五問

今有如図外圓内設斜容甲乙丙圓

則斜交外甲圓周一相交而乙圓者甲圓與外
圓周切又以而圓挾斜其兩圓乎甲圓相親

只云外徑若干甲徑若干乙徑

若干問丙徑術如何

答曰如左術

術曰置外甲差倍之内減乙

名自之内減乙冪開平方以減

天餘乘外以甲除得丙徑合問

山陽備中後月郡七日市住 藤代清之助正明

敬白

明治九丙子九月吉日

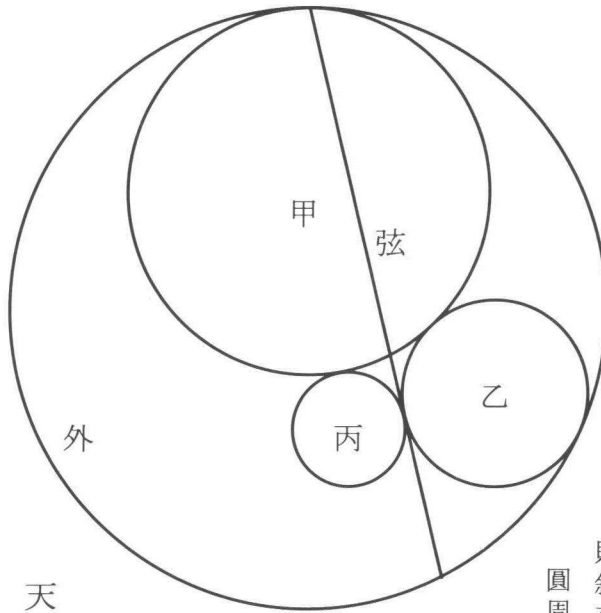


図 4

問題文の中で、小さい字の部分の「又以而圓挾斜・・・」の「而」は「丙」の誤りであろう。

[Appendix 2] 不動円

ここで、解法を極端に簡潔にしているのが、「不動円」である。
先の『算額（その4）』の「反転法」の性質Ⅵは

「反転円に直交する円は、それ自身に反転される」

であった。これを利用すると、解答図は問題図に何本か補助線（+円）を引いたにすぎない。

関数解析における「不動点」、物理学における「不変量」・「保存則」などは、この「不動円」と同様に、「変わらない」ことによって、人間の思考を非常に分かり易くしてくれるものようである。

[Appendix 3] 反転法による解法の計算例

丙円の半径 r を求める計算法の一例を、以下に示す。

まず、 $TE = \frac{k^2}{2a} \equiv t$ とおく。 ⑤

$$\begin{cases} \textcircled{3} \Rightarrow k^2 + b^2 = (t - b)^2 + y^2 & \textcircled{3}' \\ \textcircled{4} \Rightarrow k^2 + r^2 = (t - r)^2 + x^2 & \textcircled{4}' \end{cases}$$

よって、この2式から、

$$y^2 - x^2 = 2t(b - r) \quad \textcircled{6}$$

また、 $\textcircled{2} \Rightarrow (y - x)^2 = 4br$ ②'

これらを変形して、

$$\begin{cases} (y + x)(y - x) = 2t(b - r) \\ (y - x)(y - x) = 4br \end{cases} \\ \Rightarrow \frac{y + x}{y - x} = \frac{t(b - r)}{2br} \equiv p$$

これから、

$$x + y = py - px \\ (p + 1)x = (p - 1)y \quad \therefore y = \frac{p + 1}{p - 1} x \quad (p > 1)$$

$$y - x = \left(\frac{p + 1}{p - 1} - 1 \right) x = \frac{2}{p - 1} x$$

これを②'に代入して、

$$\left(\frac{2}{p - 1} x \right)^2 = 4br \\ x^2 = br(p - 1)^2 = br \left\{ \frac{t(b - r)}{2br} - 1 \right\}^2$$

この x^2 を④' に代入して,

$$\begin{aligned} k^2 - t^2 + 2tr &= \frac{\{t(b-r) - 2br\}^2}{4br} \\ (2at - t^2 + 2tr) \times 4br &= t^2(b-r)^2 - 4tbr(b-r) + 4b^2r^2. \\ 4b(2at - t^2)r + 8tbr^2 &= t^2b^2 - 2t^2br + t^2r^2 - 4tb^2r + 4tbr^2 + 4b^2r^2 \\ (t^2 - 4tb + 4b^2)r^2 + 2tb(t - 2b - 4a)r + t^2b^2 &= 0 \\ \left(1 - \frac{2b}{t}\right)^2 r^2 + 2b\left(1 - \frac{2b}{t} - \frac{4a}{t}\right)r + b^2 &= 0. \end{aligned} \quad \text{⑥}$$

ところで, ①と⑤から

$$\frac{2b}{t} = \frac{4ab}{k^2} = a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{R}\right) = \frac{R-a}{R} \quad \text{⑦}$$

⑦を用いて⑥の係数を計算すると

$$\begin{aligned} 1 - \frac{2b}{t} &= 1 - \frac{R-a}{R} = \frac{a}{R}, \\ b\left(1 - \frac{2b}{t} - \frac{4a}{t}\right) &= b - b\frac{R-a}{R} - 2a\frac{R-a}{R} \\ &= \frac{a}{R}\{b - 2(R-a)\}. \end{aligned}$$

よって ⑥ から

$$\begin{aligned} \left(\frac{a}{R}r\right)^2 + 2\{b - 2(R-a)\}\left(\frac{a}{R}r\right) + b^2 &= 0 \\ \therefore \frac{a}{R}r &= -\{b - 2(R-a)\} \pm \sqrt{\{b - 2(R-a)\}^2 - b^2}. \end{aligned}$$

乙円は劣弧に接しているから, この 2 次方程式の解のうち, 平方はマイナスの方をとると,

$$r = \frac{R}{a} \left[\{2(R-a) - b\} - \sqrt{\{2(R-a) - b\}^2 - b^2} \right].$$

これが丙円の (半) 径である.

[Appendix 4] 第二余弦定理による解法

この原稿をほとんど書き終えて, 締切までの間に見直しをしていた頃, 天文学会秋季年会で, 国立天文台の木下宙教授にお会いした. 彼が 2001 年度に東京大学理学部の天文学科の学部学生に行っている天体力学の授業で, 学生にこの問題に挑戦させたと言う. 解けたら, テストの成績に関係なく単位を与えると約束したそうである.

ところで, 彼がそういう約束をしたのは, 彼もそして私も, お互いにこの問題を我ながらうまく解いたと言う自負心があったからである. まず私の場合は, 時間はかかったが, 自

分ではこれ以上はないと思えるほど、エレガントな解き方を見つけた。また、木下さんにこの算題の存在を教えたのも私であり、自分で解いた経験からしても、きっと彼がこれを解決するまでには、かなり時間がかかるであろうと予想していた。しかし彼はかなり強引な計算ではあったが、僅か1週間ほどで解決してしまったのである。二人とも、反転法を利用した解法であった。(反転法については、『算額(その4)』及び『算額(その5)』を参照のこと。)

天文学科の濱田吉博君という学生さんが解答を提出したというので、見せてもらった。それはほぼ私の予想通りに、第二余弦定理のみを用いた解法であり、その解答を見たとき、もしかしたら、これが今から120年以上前の出題者兼最初の解答者が解いた方法であるかもしれないと思った。

一般に、和算家は第二余弦定理を知ってはいたが、ほとんどの場合、いろいろな補助線を引いて、線分の長さの間の関係を、たかだか「鉤股弦の定理」のみを用いて計算していた。残念ながら、生石神社の算額奉納者の解法は残されていないようなので、断定は出来ないが、この学生さんの解法は、たぶん「和算家と反転法の中間の解法」というのが、もっとも真実に近いであろう。

顧みれば、私も以前これに近いことをずっと考えていた。苦心して途中まで考えては、計算のあまりの大変さに、その後の計算を諦めてしまっていたのだった。

それにそのころは、問題文と術文の漢文もうまく読めないところがあって、例えば、問題文の「則斜交外甲圓周一相交」や、術文を「天² - 乙冪」と読むのか「乙冪 - 天²」と読むのか、さらには、肝心の丙円が甲円・乙円・直線とどのような接触関係にあるのかなど、読み下し文もよく分からないまま(問題も確定出来ずに)、途中まで計算しては挫折していた。そして、もっとうまい方法があるに違いないと漠然と考えていた。

この学生さんの解を見て、基本方針さえ確かなら、多少(かなり)の面倒を嫌がらずに、必ず出来るはずという信念のもとに、もう少し頑張って計算するべきであったかも知れないと思った。大いに教えられるところがあった。

実際の解法の概略は以下のようなものである。計算力に自信のある人は、是非自分でトライしてみてほしい。私も計算を follow してみたが、計算用紙5枚ほどを要する大変な計算量であった。

次ページの図5において、

$\triangle O_1 O O_2$ から $\cos \alpha$,

$\triangle T O O_2$ から上の $\cos \alpha$ を用いて $T O_2^2$,

$\triangle T C O_2$ において、 $T C^2$ を求めてから $\cos \beta$,

$\triangle T O_1 O_2$ から $\cos \gamma$ を求める。

さらに、 $\triangle O_1 O_2 O_3$ から $\cos \delta$ と r の間の関係式を求めると、

$$r = \frac{(a+b)b(1-\cos\delta)}{(a+b)\cos\delta+a-b}.$$

ここで、 $\sin \beta$, $\sin \gamma$ を計算しておいて、

$$\text{加法定理} \quad \cos \delta = \cos(\beta - \gamma) = \cos \beta \cos \gamma + \sin \beta \sin \gamma$$

によって $\cos \delta$ を求め、上の r の式に代入する。その結果、

$$r = \frac{Rb}{a} \frac{2a + b - 2a\sqrt{(R-a-b)/(R-a)}}{2R - b - 2R\sqrt{(R-a-b)/(R-a)}}$$

を得る。学生さんのレポートの解答はここで終わっている。算額の解答とは違っているが、木下さんがパソコンで任意の数値を代入してみると、算額の解答と同じになるという。それに意を強くして、計算してみた。分母を有利化して、計算用紙たっぷり 2 枚くらいのかなりの計算によって、やっと次の式が得られた。

$$r = \frac{R}{a} \left[(2R - 2a - b) - 2\sqrt{(R-a-b)(R-a)} \right].$$

これが術文の答と同じであることは、すぐに分かる。

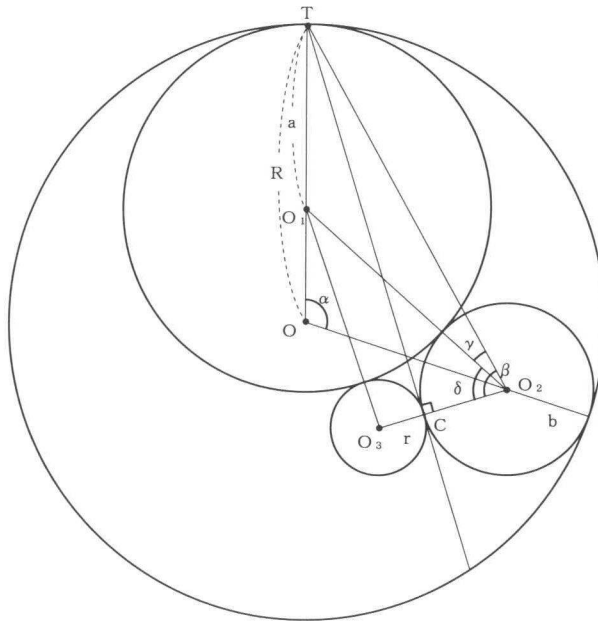


図 5

(高砂神社 奉納算額 第三問 の項 終わり)