ラムゼイ・モデルにおいて財政支出が消費・資本・利子率に与える影響について
― 予期された財政支出の変化の場合 ―

斎　藤　　　孝

1．はじめに

筆者は、斎藤［2019］において、新古典派成長モデル（連続時間のラムゼイ・モデル）における財政支出の予期されない増加が経済に与える影響について、微分方程式体系を解析的に解くことによって消費・資本ストック・利子率の経路の厳密な導出を試みた。本稿では、財政支出の予期された変化について、同様の分析を行う。

均衡財政を前提にすれば、将来の財政支出の増加が予期されている場合と予期されていない場合の相違は、次の点にある。財政支出の増加が予期されている場合には、将来の財政支出の増加は将来の増税を意味するから、消費者は将来の増税によって消費支出の減少することを現時点であらかじめ知っていることになる。したがって合理的な消費者は、財政支出の実際に増加する前から消費水準を漸進的に減らし始めるのである。このため財市場に超過供給が発生し、実質利子率が低下して資本蓄積が促進されることになる。財政支出の増加が予期されていない場合には、こうした短期的な資本蓄積の促進効果は発生しない。

ラムゼイ・モデルにおいては、予期された財政支出の増加が短期的に資本蓄積を促進して1人当たり産出量をトレンド線よりも上昇させるのである。このことは静学的な新古典派マクロ・モデルに見られるクラウディング・アウトのイメージを全く覆すものであり、興味深いインプリケーションと言えよう[1)]。

1）ラムゼイ・モデルにおける予期された財政支出の増加の影響については、Ljungqvist and Sargent［1989；

以下、本論の構成は次のとおりである。第 2 節では政府の財政支出を含むラムゼイ・モデルの連立微分方程式の体系を提示したのち、位相図を用いた直観的な説明を行う。第 3 節では、連立微分方程式の体系を解析的に解き、消費・資本・利子率の経路の厳密な導出を試みる。第 4 節は結論とする。

2．位相図による直観的説明

この節では、本論において扱うラムゼイ・モデルの連立微分方程式体系を提示したのち、位相図による直観的な説明を行う。ラムゼイ・モデルの体系については、Romer［2012；Chapter 2］など多くのマクロ経済学の教科書に概説があり、またすでに斎藤［2019；第 2 節］において説明されているので詳細についてはそちらを参照いただくとして、ここでは体系を提示するにとどめる。
体系は次のようなものである。

$$\begin{cases} \dfrac{\dot{c}}{c} = \dfrac{r - \rho - \theta g}{\theta} & (1) \\ \dot{k} = f(k) - c - G - (n+g)k & (2) \end{cases}$$

c は効率単位で測った 1 人あたり消費、r は実質利子率、k は効率単位で測った 1 人あたり資本ストック、 ρ は家計の割引率、n は人口の変化率、 θ は消費者のリスク回避度を示す正の定数、g は技術進歩率である[2)]。f は効率単位 1 人当たりの生産関数であり、次をみたす。

$$f' > 0, \quad f'' < 0 \quad (3)$$

G は財政支出を表す。ここでは均衡財政を仮定し、財政支出が家計の効用関数に直接影響を及ぼすことはないものとする。よく知られているように、（1）は家計の消費に関するオイラー方程式を、（2）は資本の蓄積式を表している。

家計の効用の割引現在価値が発散しないように、次が仮定される。

$$\rho - n - (1-\theta)g > 0 \quad (4)$$

実質利子率は、企業の利潤最大化によって次のように与えられる。

$$r = f'(k) \quad (5)$$

この体系の定常均衡は、次のように表される。

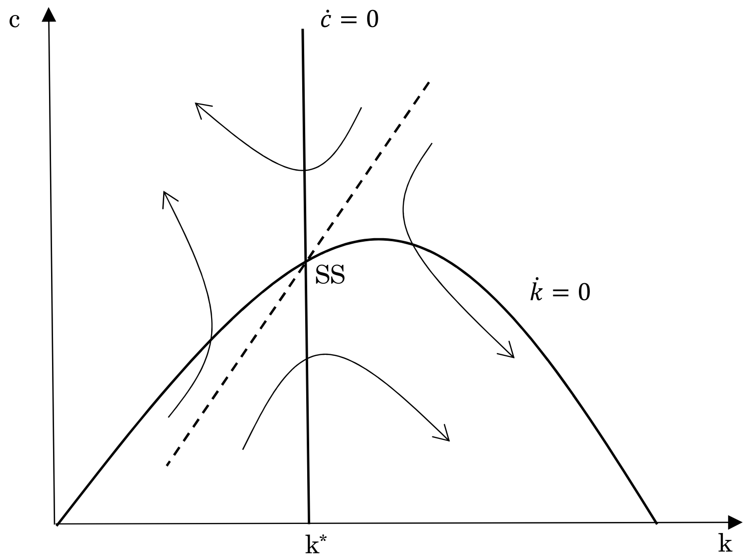
$$r^* = \rho + \theta g \quad (6)$$

$$f'(k^*) = \rho + \theta g \quad (7)$$

$$c^* = f(k^*) - G - (n+g)k^* \quad (8)$$

Ch.11］において説明されているが、そこでの説明は離散時間のモデルの数値計算によるものとなっている。
2）家計の瞬時効用関数については、相対的リスク回避度一定（CRRA）の型に設定されている。

図１　ラムゼイ・モデルの定常均衡



ただしアスタリスクは定常解を表す。

以上をもとにして、経済が初期に定常状態にあったと前提し、予期された財政支出の増加が体系、特に消費・資本・利子率の時間経路に与える影響について、位相図を用いて分析する。まず、当初の定常状態について位相図を示すと、図１のようになる。

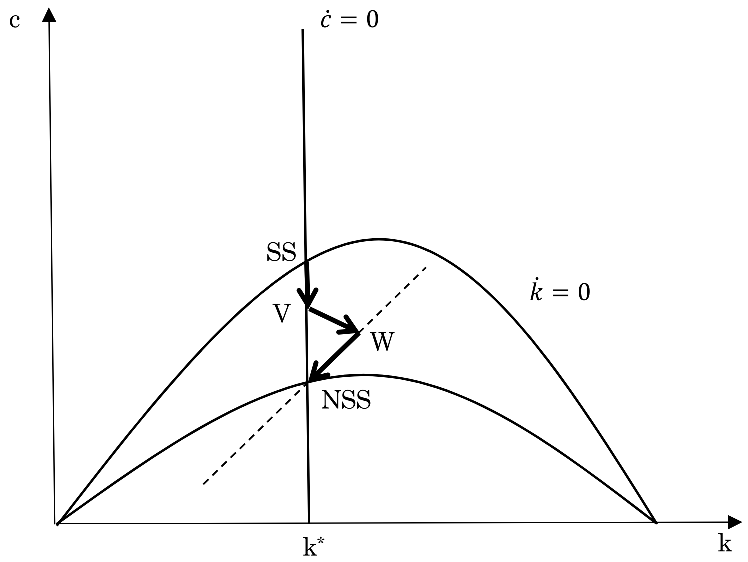
図１では、縦軸に効率労働１単位当たりの消費c、横軸に効率労働１単位当たりの資本kがとられている。図中の垂直線は（７）を描いたものであり、この線上ではcが不変となる。山型の曲線は（８）を描いた（ただしアスタリスクは無視）ものであり、この曲線上ではkが不変となる。

よく知られているように、定常均衡SSは鞍点となり、図中に描かれた破線が唯一の収束経路である。その他の経路は、やがてオイラー方程式（１）あるいは横断面条件に抵触することになり、定常均衡SSが唯一の最適成長経路になることが示される。

はじめに経済が定常均衡にあったとして、財政支出Gの予期された恒久的な増加があった（ある時点t_0において、将来の時点t_1以降、財政支出を恒久的に増加することがアナウンスされた）場合の体系の変化は、図２に描かれている。

この場合、時点t_1以降に$\dot{k}=0$を示す曲線が財政支出の増加と同じだけ下方にシフトすることを消費者は時点t_0において知っていることになる。合理的な消費者は、時点t_1になるまで定常解SSにとどまり、時点t_1に新たな定常解NSSへジャンプするといった行動はとらない。なぜなら、そうした消費のジャンプは、消費の連続的な変化を前提とするオイラー方程式（１）が時点t_1においてみたされないことを意味しており、将来の不合理な消費の変化を知りつつ消費者が消費の経路

図２　予期された財政支出の恒久的な増加



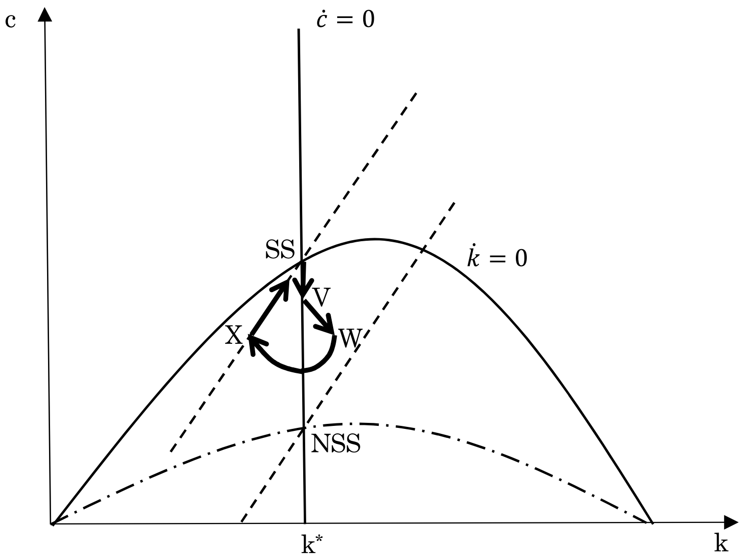
を決定することはあり得ないからである。

合理的な消費の経路は次のようになる。時点t_0において将来の財政支出の増加（増税による消費の低下）という新たな情報のもたらすサプライズにより、消費の下方への若干のジャンプが発生するが、その後は時点t_1以降に実現する新たな定常解NSSに向かって、消費が徐々に下方へと調整される。財政支出の増加する前から消費水準の低下が始まるので、財市場に超過供給が発生し、実質利子率が低下して資本ストックが増加する。実際に財政支出の増加する時点t_1以降になると、こんどは財市場に超過需要が発生して実質利子率が上昇し、資本ストックが減少し始め、この動きは新たな定常解NSSに達するまで続く。以上をまとめると、経済は時点t_0に定常解SSから少し下方のV点へジャンプし、時点t_0から時点t_1の間は、財政支出の変化前の位相図（図１）における発散経路にいったん乗り、時点t_1において新たな定常解NSSへ収束する経路に達する（VからWへの動き）。時点t_1以降は、収束経路（図２の破線）に乗って新たな定常解NSSへ収束することになる。

以上のダイナミックスにおいて注目すべきことは、予期された恒久的な財政支出の増加のあった場合には、短期的に資本ストックの増加が促進されるということである。これは消費者が将来の増税による消費水準の低下をあらかじめ予測しているために、実際に財政支出が増加する前から、徐々に消費水準を低下させることから生ずるのである。

次に、財政支出Gの予期された一時的な増加のあった（時点t_0において、将来の時点t_1から時点t_2までの間、財政支出を増加することがアナウンスされた）場合については、図３に描かれている。この場合、$\dot{k}=0$を示す曲線は、時点t_1において財政支出の増加分だけ下方シフトし（図中

図３　予期された財政支出の一時的な増加



の長鎖線)、時点t_2においてもとに戻ることとなる。消費者はこの情報を時点t_0においてはじめて得ることになるため、時点t_0に消費は少し下方にジャンプする（SSからVへの動き）。時点t_0から時点t_1までの間は、消費者が将来の増税に備えて徐々に消費を減らすため、経済はいったん発散経路に乗り、資本ストックが増加する（VからWへの動き）。時点t_1から時点t_2までの間は、消費の減少が財政支出の増加分よりも少ないので、財市場に超過需要が発生し、実質利子率が上昇して資本ストックは減少し始める。また消費者がもとの定常均衡SSへ帰る準備を始めるため、経済はいったん発散経路に乗り、図のWからSSへの収束経路上の点Ｘへ向かう動きを示す。財政支出が元の水準に戻る時点t_2以降は、経済は収束経路に乗ってSSへ収束する。

財政支出の増加が一時的な場合においても、恒久的な場合と同様に、実際に財政支出の増加がおこるまでの間、資本蓄積が促進されることになる。恒久的な場合と違っているのは、実際に財政支出が増加してからもとに戻るまでの間、資本ストックは大きく減少してもとの定常状態の水準を下回ることである。したがって財政支出の変化をきっかけとして、資本ストックは循環的な動きを示すことになるのである。

３．消費・資本・利子率のダイナミックス

この節では、ラムゼイ・モデルの連立微分方程式体系を解析的に解き、前節で位相図により確認した体系のダイナミックスを厳密に展開する。解くべき問題の設定は次のようである。当初に経済が定常均衡にあったとして、ある時点t_0において、将来の時点t_1から時点t_2までの間、財政支出

を増加させることがアナウンスされたとして、その後の経済の経路を導出することである。なお、財政支出の恒久的な増加については、$t_2 \to \infty$とすれば議論可能である。

３－１．連立微分方程式体系の解の導出

この項の内容は、予期されない財政支出の変化について分析した斎藤［2019；第４節１項］とほとんど同じであるが、重要な部分であるため、重複を厭わず再掲することとした。なお連立微分方程式の解法等、詳細については斎藤［2019］の補論を参照されたい（参照しやすくするため、３－１項については、数式の番号等もあえて斎藤［2019；第４節１項］に合わせてある）。

経済の体系は（１）に（６）を代入して得られる効率労働１単位当たりの消費cの動き

$$\frac{\dot{c}}{c} = \frac{f'(k) - \rho - \theta g}{\theta} \quad (9)$$

と、効率労働１単位当たりの資本kの動きを表す（２）により、cとkの連立微分方程式として描写される。ここでは、財政支出Gの変化する前には経済が定常均衡にあったものとして、体系を財政支出の変化前における定常均衡の近傍で線形近似することにより、解くことを可能にする。

$$\begin{cases} (c \dot{-} c^*) = \gamma(k - k^*) & (10) \\ (k \dot{-} k^*) = -(c - c^*) + \beta(k - k^*) - (G - G_L) & (11) \end{cases}$$

ただしG_LはGの変化前の値である。c^*とk^*は（７）と（８）で$G = G_L$と置いて得られる、cとkの定常均衡における値である。βとγは定数であり、次のように表される。

$$\beta = f'(k^*) - n - g = \rho - n - (1 - \theta)g > 0 \quad (12)$$

$$\gamma = \frac{c^* f''(k^*)}{\theta} < 0 \quad (13)$$

係数βとγの符号については、第２節の（３）と（４）により従う。

連立微分方程式（10）（11）の一般解は、次のように与えられる。

$$c - c^* = \left[h_1 - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_1 s}ds\right]e^{\mu_1 t} + \left[h_2 + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds\right]e^{\mu_2 t} \quad (14)$$

$$k - k^* = \frac{1}{\mu_2}\left[h_1 - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_1 s}ds\right]e^{\mu_1 t} + \frac{1}{\mu_1}\left[h_2 + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds\right]e^{\mu_2 t} \quad (15)$$

ただしh_1およびh_2は初期条件等によって決まる任意の定数、μ_1およびμ_2は、方程式

$$\mu^2 - \beta\mu + \gamma = 0 \quad (16)$$

の異符号の解であり、$\mu_1 < 0 < \mu_2$ とする。

一般解（14）と（15）を用いて経済の動きを描写するためには、定数 h_1 および h_2 を特定する必要がある。そのための条件は解が発散しないこと、そして財政支出の増加する情報の得られる時点 t_0 において、資本ストックは瞬時に動かせないこと（$k(t_0) = k^*$）である。

解の発散しないためには、μ_2 が正の数であるから、h_2 を次のように設定する。

$$h_2 = -\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds \quad (17)$$

（17）を（15）に代入し、$t = t_0$ において（16）の左辺がゼロとなることから、h_1 は次のようになる。

$$h_1 = \frac{{\mu_2}^2}{\mu_1 - \mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}\int_{t_0}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds + \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}\int_{-\infty}^{t_0}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_1 s}ds \quad (18)$$

（17）、（18）を（14）、（15）へ代入することにより、次を得る。

$$c - c^* = \frac{{\mu_2}^2}{\mu_1 - \mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_1 s}ds$$

$$- \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}e^{\mu_2 t}\int_{t}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds \quad (19)$$

$$k - k^* = \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds - \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_0}^{t}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_1 s}ds$$

$$- \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}e^{\mu_2 t}\int_{t}^{\infty}\{G(s) - G_L\}e^{-\mu_2 s}ds \quad (20)$$

財政支出 G については、時点 t_0 以前は将来の財政支出の変化が予期されていないこと、そして時点 t_0 以後は将来の財政支出の変化が予期されていることから、次のように定義される。

$$t < t_0 \text{のとき} \qquad G(s) = G_L \qquad -\infty < s < \infty \quad (21a)$$

$$t \geq t_0 \text{のとき} \qquad G(s) = \begin{cases} G_L & -\infty < s < t_1 \\ G_H & t_1 \leq s < t_2 \\ G_L & s \geq t_2 \end{cases} \quad (21b)$$

ただし $G_L < G_H$ である。

以上に得られた解（19）と（20）および財政支出の定義（21）を用いて、消費と資本の経路を導出することができる。利子率については（５）を用いて資本の経路から導出できる。以下、消費、資本、利子率の順にダイナミックスを考察することにしよう。

３－２．消費のダイナミックス

消費については、第3節に見たとおり、財政支出の増加時点で減少（下方にジャンプ）し、ある時点まで減少し続け、その後は回復する動きを示す。以下、局面を4つに分けて記述する。

① $t<t_0$ のとき

この局面では、まだ将来の財政支出の変化は予期されていない。財政支出の定義（21a）より、どの時点においても $G(s)=G_L$ であるから、消費のダイナミックスを示す（19）に代入すれば、

$$c=c^* \quad (22)$$

となることが確認できる。

② $t_0 \leq t<t_1$ のとき

この局面に入ると、将来の財政支出の変化が予期されているので、財政支出の定義（21b）を消費のダイナミックス（19）に代入すれば、

$$c-c^*=\frac{{\mu_2}^2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds$$

$$=\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_1(t-t_0)}$$

$$-\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_2(t-t_0)} \quad (23)$$

となる。(23) をさらに整頓すると、

$$c=c^*+\phi(t) \quad (24)$$

が得られる。ただし $\phi(t)$ は次のように定義される。

$$\phi(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{\mu_2 e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_1 e^{\mu_2(t-t_0)}\right\} \quad (25)$$

関数 $\phi(t)$ は次の性質を持っている。第1に $G_L<G_H$、$\mu_1<0<\mu_2$、$t_1<t_2$ より、$\phi(t)<0$ となることは明らかであろう。

第2に $\phi(t)$ は $-(G_H-G_L)$ よりも大きな値をとる。$(G_H-G_L)+\phi(t)$ を計算すると、

$G_H-G_L+\phi(t)$

$$=(G_H-G_L)\left[1+\left\{1-e^{-\mu_2(t_2-t_1)}\right\}e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\left\{\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1(t-t_0)}-\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2(t-t_0)}\right\}\right]$$

$$=(G_H-G_L)\left[1+\varepsilon(t)\left\{\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)}-\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\right\}\right] \quad (26)$$

となる。ただし ε は次のように定義される。

$$\varepsilon(t)=\left\{1-e^{-\mu_2(t_2-t_1)}\right\}e^{-\mu_2(t_1-t)} \quad (27)$$

$0<\mu_2$、$t<t_1<t_2$より、εが0と1の間の値をとることは明らかであろう。(26) はさらに次のように書き換えられる。

$G_H - G_L + \phi(t)$

$$= (G_H - G_L)\left[-\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}\left\{1-\varepsilon(t)e^{(\mu_1-\mu_2)(t-t_0)}\right\} + \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}\{1-\varepsilon(t)\}\right] \quad (28)$$

関数εが0と1の間の値をとること、および$G_L<G_H$、$\mu_1<0<\mu_2$、$t_0\le t<t_1$から (28) より、

$$G_H - G_L + \phi(t) > 0 \quad (29)$$

が言える。このことは、消費の減少が財政支出の変化分より少ないことを示している。

第3に (25) から容易に確認できるように、$G_L<G_H$、$\mu_1<0<\mu_2$、$t_0\le t<t_1<t_2$のもとで、

$$\phi'(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{e^{\mu_1(t-t_0)} - e^{\mu_2(t-t_0)}\right\} \le 0 \quad (30)$$

$$\phi''(t) = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{\mu_1 e^{\mu_1(t-t_0)} - \mu_2 e^{\mu_2(t-t_0)}\right\} < 0 \quad (31)$$

となることが言える (等号成立は$t=t_0$のとき)。

関数$\phi(t)$の性質と (24) から、消費cの動きについて次のことが言える。消費は時点t_0において下方にジャンプし、その後次第に減少するが、低下幅は財政支出の増加分G_H-G_Lよりも少ない。

③　$t_1\le t<t_2$のとき

財政支出の定義 (21b) と消費のダイナミックス (19) から、次のようになる。

$$c - c^* = \frac{{\mu_2}^2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds - \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t}(G_H-G_L)e^{-\mu_1 s}ds$$

$$-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}\int_{t}^{t_2}\{G(s)-G_L\}e^{-\mu_2 s}ds$$

$$= \frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}(e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2})$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)e^{\mu_1 t}(e^{-\mu_1 t_1} - e^{-\mu_1 t}) - \frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}(e^{-\mu_2 t} - e^{-\mu_2 t_2}) \quad (32)$$

(32) をさらに展開すると、次が得られる。

$$c = c^* + \lambda(t) \quad (33)$$

ただし$\lambda(t)$は、次のように定義される。

$$\lambda(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)e^{\mu_1(t-t_0)}e^{\mu_2 t_0}(e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2}) - \frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t-t_1)} - 1\right\}$$

$$+\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_2(t-t_2)}-1\right\} \quad (34)$$

関数λ(t)は、次のような性質を持っている。第1に$G_L<G_H$、$t_1 \leq t < t_2$そして$\mu_1<0<\mu_2$より、λ(t)<0であることが分かる。

第2に（34）および関数φ(t)の定義式（25）より、

$$\lambda(t_1)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_2 e^{\mu_1(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)+\mu_1\left\{e^{\mu_2(t_1-t_2)}-1\right\}\right]$$

$$=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_2 e^{\mu_1(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)\right.$$

$$\left.+\mu_1 e^{\mu_2(t_1-t_0)}\left\{e^{\mu_2(t_0-t_2)}-e^{\mu_2(t_0-t_1)}\right\}\right]$$

$$=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_2 e^{\mu_1(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)\right.$$

$$\left.+\mu_1 e^{\mu_2(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_2}-e^{-\mu_2 t_1}\right)\right]$$

$$=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)e^{\mu_2 t_0}\left\{\mu_2 e^{\mu_1(t_1-t_0)}-\mu_1 e^{\mu_2(t_1-t_0)}\right\}=\phi(t_1) \quad (35)$$

さらに、

$$\lambda'(t)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)-e^{\mu_1(t-t_1)}+e^{\mu_2(t-t_2)}\right\} \quad (36)$$

であるから（30）に注意すると、

$$\lambda'(t_1)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)+e^{\mu_2(t_1-t_2)}-1\right\}$$

$$=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)\right.$$

$$\left.+e^{\mu_2(t_1-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_2}-e^{-\mu_2 t_1}\right)\right\}$$

$$=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)e^{\mu_2 t_0}\left\{e^{\mu_1(t_1-t_0)}-e^{\mu_2(t_1-t_0)}\right\}$$

$$=\phi'(t_1) \quad (37)$$

となり、消費の経路は時点t_1において滑らかにつながることが分かる。

第3に（37）と（30）から$\lambda'(t_1)=\phi'(t_1)<0$となるが、(36) をtで微分して$\lambda''(t)$を計算すると、$G_L<G_H$、$t_0<t_1$および$\mu_1<0<\mu_2$より、

$\lambda''(t)$

$$=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{\mu_1 e^{-\mu_2(t_1-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_1 e^{-\mu_2(t_2-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_1 e^{\mu_1(t-t_1)}+\mu_2 e^{\mu_2(t-t_2)}\right\}$$

$$=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left[-\mu_1 e^{\mu_1(t-t_0)}\left\{e^{-\mu_1(t_1-t_0)}-e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\right\}-\mu_1 e^{-\mu_2(t_2-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}\right.$$
$$\left.+\mu_2 e^{\mu_2(t-t_2)}\right]>0 \quad (38)$$

が言える。いっぽう（36）より $G_L<G_H$、$t_1<t_2$ および $\mu_1<0<\mu_2$ のもとで、

$$\lambda'(t_2)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t_2-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)+1-e^{\mu_1(t_2-t_1)}\right\}>0 \quad (39)$$

となる。$\lambda'(t)$は連続関数であるから、以上のことは、t_1 とt_2 の間のある時点において$\lambda'(t)$が 0 の値をとる（$\lambda(t)$ が最小になる）ことを示している。以下ではこの時点を$t=t_{min}$と呼ぶことにしよう。

第４に、時点t_{min}において $\lambda'(t_{min})=0$ となることから（36）より、次が言える。

$$e^{\mu_1(t_{min}-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)-e^{\mu_1(t_{min}-t_1)}=-e^{\mu_2(t_{min}-t_2)} \quad (40)$$

（40）と関数$\lambda(t)$の定義式（34）により、$\lambda(t)$ の$t=t_{min}$における値を、次のように表現することができる。

$$\lambda(t_{min})=\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{\mu_1(t_{min}-t_0)}e^{\mu_2 t_0}\left(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2}\right)-e^{\mu_1(t_{min}-t_1)}\right\}$$
$$+\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)e^{\mu_2(t_{min}-t_2)}-(G_H-G_L)$$
$$=-(G_H-G_L)\left\{1-e^{\mu_2(t_{min}-t_2)}\right\} \quad (41)$$

時点t_{min}はt_1とt_2の間にあるから（41）と（33）により、

$$c(t_{min})=c^*+\lambda(t_{min})>c^*-(G_H-G_L) \quad (42)$$

となる。消費の減少は、最も大きいときでも、財政支出の増加分より少なくなる。

④　$t_2\leq t$のとき

財政支出の定義（21b）と消費のダイナミックス（19）から、次のようになる。

$$c-c^*=\frac{{\mu_2}^2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds$$
$$-\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_1 s}ds \quad (43)$$

（43）を展開すると、次のようになる。

$$c=c^*+\omega(t) \quad (44)$$

ただし$\omega(t)$は、次のように定義される。

$$\omega(t)=\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_1(t-t_0)}e^{\mu_2 t_0}$$

$$-\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)(e^{-\mu_1 t_1}-e^{-\mu_1 t_2})e^{\mu_1 t} \quad (45)$$

関数ω(t)は、次のような性質を持っている。第1に $G_L<G_H$、$t_1<t_2$、$\mu_1<0<\mu_2$ であることから、ω(t)<0となることが分かる。

第2に（45）と関数λ(t)の定義式（34）から容易に確認できるように、次が言える。

$$\omega(t_2)=\lambda(t_2) \quad (46)$$

第3に（45）から容易に確認できるように、$\mu_1<0$ のもとで、

$$\omega'(t)=\mu_1\omega(t)>0, \qquad \omega''(t)=\mu_1\omega'(t)<0 \quad (47)$$

となる。すなわち消費は時間とともに逓減的に上昇する。

第4に（47）と（45）から、

$$\omega'(t_2)\ =\mu_1\omega(t_2)$$

$$=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_1(t_2-t_0)}e^{\mu_2 t_0}-e^{\mu_1(t_2-t_1)}+1\right\} \quad (48)$$

となるが、これは先に見た（39）の右辺に一致する。すなわち、

$$\omega'(t_2)=\lambda'(t_2) \quad (49)$$

となり、時点 t_2 において消費の経路は滑らかにつながる。

第5に $\mu_1<0$ であるから、(45) より次が成り立つ。

$$\lim_{t\to\infty}\omega(t)=0 \quad (50)$$

消費は最終的にもとの定常解 c^* に収束する。

以上の分析から、消費のダイナミックスについて次のことが言える。消費は、財政支出が実際に増加される時点 t_1 を過ぎてもしばらくは減少を続け、t_1 と t_2 の間のある時点 t_{min} において最小となり、その後は増加に転じ、最終的にはもとの定常解 c^* に収束する。消費は最下限においても、財政支出の増加分ほど減少することはない。また消費の時間経路はスムースである。

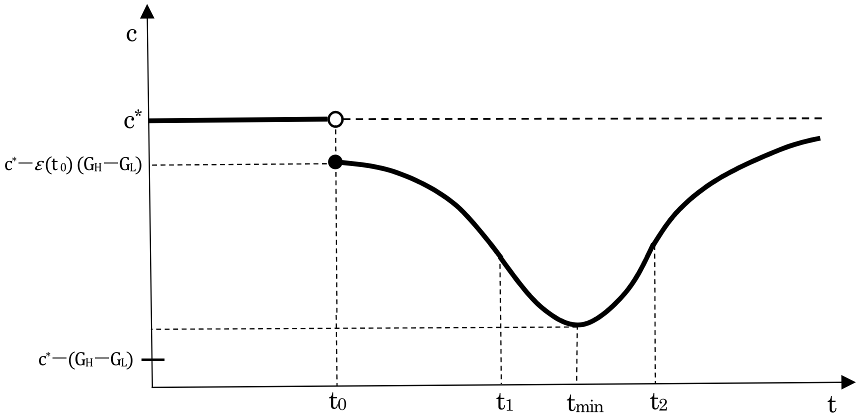
ここまでに見た消費のダイナミックスを図示すると、図4のようになる。なお、図中に示されている時点 t_0 における消費の値については、次のようにして計算できる。(28) の t に t_0 を代入することにより、

$$\phi(t_0)=-\varepsilon(t_0)(G_H-G_L) \quad (51)$$

が求まる。したがって（24）とε(t)の定義（27）により、次のようになる。

$$c(t_0)=c^*-\varepsilon(t_0)(G_H-G_L)=c^*-(G_H-G_L)\left\{1-e^{-\mu_2(t_2-t_1)}\right\}e^{-\mu_2(t_1-t_0)} \quad (52)$$

図４　消費のダイナミックス



３－３．資本のダイナミックス

資本ストックkについては、財政支出が増加するという情報の得られる時点t_0では、直ちに調整ができないので不変であるが、その後の消費の減少に伴って増加し、財政支出の実際に増える時点t_1以降は減少に転じ、さらに財政出のもとに戻る時点t_2以降は再び増加する、といった循環的な動きを示す。以下、３つの局面に分けて記述する。

① $t<t_0$のとき

この局面では、財政支出の変化は予期されていないので、財政支出の定義（21a）と資本のダイナミックスを示す（20）から容易に確認できるように、資本ストックは定常値にとどまっている。

$$k = k^* \quad (53)$$

② $t_0 \leq t < t_1$のとき

この局面では、財政支出の変化が予期されているので、財政支出の定義（21b）と（20）から、

$$k - k^* = \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_2 - \mu_1)t_0} e^{\mu_1 t} \int_{t_1}^{t_2} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds$$

$$- \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_2 t} \int_{t_1}^{t_2} (G_H - G_L) e^{-\mu_2 s} ds \quad (54)$$

となる。(54) を展開・整頓して若干の変形を施すと、次のようになる。

$$k = k^* + \alpha(t) \quad (55)$$

ただし$\alpha(t)$は、次のように定義される。

$$\alpha(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} (e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2}) e^{\mu_2 t_0} \left\{ e^{\mu_1 (t - t_0)} - e^{\mu_2 (t - t_0)} \right\} \quad (56)$$

関数$\alpha(t)$は、次の性質を持っている。第１に$\alpha(t_0) = 0$である。第２に$G_L < G_H$、$\mu_1 < 0 < \mu_2$、

$t_1<t_2$より、$t_0 \leq t$において$\alpha(t) \geq 0$である（等号成立は$t=t_0$のときのみ)。第3に（56）から容易に確認できるように、

$$\alpha'(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{\mu_1 e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_2 e^{\mu_2(t-t_0)}\right\}>0 \quad (57)$$

であるから、$t_0 \leq t$において$\alpha(t)$は単調増加である。第4に$\alpha(t)$のtに関する二階微分は、次のようになる。

$$\alpha''(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{{\mu_1}^2 e^{\mu_1(t-t_0)}-{\mu_2}^2 e^{\mu_2(t-t_0)}\right\} \quad (58)$$

μ_1とμ_2が方程式（16）の解であることから、$\mu_1+\mu_2=\beta$となるから、

$${\mu_2}^2={\mu_1}^2+\beta(\mu_2-\mu_1) \quad (59)$$

となる。(59) を（58）の中括弧のなかの${\mu_2}^2$に代入し、$\mu_1<0<\mu_2$と$\beta>0$に注意すれば、(58) の右辺の符号が正になることを容易に示すことができる。したがって$t_0 \leq t$において$\alpha(t)$は、時間とともに逓増的に増加する。

関数$\alpha(t)$の性質と（55）から、この時期における資本ストックkの動きについて次のことが言える。資本は財政支出の増加のアナウンスされた時点では、定常均衡値k^*にとどまっている。その後消費の減少に伴って、資本は逓増的に増加する。

③　$t_1 \leq t<t_2$のとき

この局面においては、(21b) と（20）により、次のようになる。

$$k-k^*=\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds-\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t}(G_H-G_L)e^{-\mu_1 s}ds$$
$$-\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t}\int_{t}^{t_2}(G_H-G_L)e^{-\mu_2 s}ds \quad (60)$$

(60) を展開・整頓すると、次が得られる。

$$k=k^*+\sigma(t) \quad (61)$$

ただし$\sigma(t)$は、次のように定義される。

$$\sigma(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_1(t-t_0)}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})-\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1(t-t_1)}+\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2(t-t_2)} \quad (62)$$

関数$\sigma(t)$は、次のような性質を持っている。第1に（62）から、

$$\sigma(t_1)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_1(t-t_0)}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})-\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_1}$$
$$=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}\left\{e^{\mu_1(t_1-t_0)}-e^{\mu_2(t_1-t_0)}\right\} \quad (63)$$

となるが、関数α(t)の定義（56）より（63）はσ(t_1)= α(t_1)を意味する。

第2に関数σ(t)の導関数は、

$$\sigma'(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left\{\mu_1 e^{-\mu_2(t_1-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_1 e^{-\mu_2(t_2-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}-\mu_1 e^{\mu_1(t-t_1)}+\mu_2 e^{\mu_2(t-t_2)}\right\}$$

$$=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left[\mu_1 e^{\mu_1(t-t_0)}\left\{e^{-\mu_2(t_1-t_0)}-e^{-\mu_1(t_1-t_0)}\right\}-\mu_1 e^{-\mu_2(t_2-t_0)}e^{\mu_1(t-t_0)}\right.$$

$$\left.+\mu_2 e^{\mu_2(t-t_2)}\right]<0 \quad (64)$$

となり、$G_L<G_H$、$t_0<t_1$、$\mu_1<0<\mu_2$より、関数σ(t)は単調減少である。

第3に、消費の最小となる時点t_{min}における関数σ(t)の値を見ると、

$$\sigma(t_{min})=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}\left\{(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_1(t_{min}-t_0)}-e^{\mu_1(t_{min}-t_1)}\right\}$$

$$+\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2(t_{min}-t_2)} \quad (65)$$

となるが、(40) によれば（65）の右辺は、次のようになる。

$$\sigma(t_{min})=-\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2(t_{min}-t_2)}+\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_2(t_{min}-t_2)}=0 \quad (66)$$

関数σ(t)の性質と（61）から、この時期における資本kの動きについて次のことが言える。実際に財政支出の増加する時点t_1以降、資本は減少し（これは消費の減少が財政支出の増加ほど大きくないので財市場に超過需要が発生するからである)、消費の最小となる時点t_{min}において、もとの定常値k^*に回帰し、財政支出の増加の解除されるt_2まで、さらに減少を続ける。

④　$t_2 \leq t$のとき

このときの資本ストックの経路は、(20) より次のようになる。

$$k-k^*=\frac{\mu_2}{\mu_1-\mu_2}e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}\{G(s)-G_L\}e^{-\mu_2 s}ds$$

$$-\frac{\mu_1}{\mu_1-\mu_2}e^{\mu_1 t}\int_{t_1}^{t_2}\{G(s)-G_L\}e^{-\mu_1 s}ds \quad (67)$$

(67) を展開すると、次のようになる。

$$k=k^*+\eta(t) \quad (68)$$

ただしη(t)は、次のように定義される。

$$\eta(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_2 t_1}-e^{-\mu_2 t_2})e^{(\mu_2-\mu_1)t_0}e^{\mu_1 t}-\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}(e^{-\mu_1 t_1}-e^{-\mu_1 t_2})e^{\mu_1 t} \quad (69)$$

関数η(t)は、次のような性格を持っている。第1に$G_L<G_H$、$\mu_1<0<\mu_2$および$t_1<t_2$より、

η (t)<0 である。第 2 に（69）および（62）により、

$$\eta(t_2) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2}(e^{-\mu_2 t_1} - e^{-\mu_2 t_2})e^{\mu_2 t_0}e^{\mu_1(t_2 - t_0)} - \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2}e^{\mu_1(t_2 - t_1)} + \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} = \sigma(t_2) \quad (70)$$

となることが確認できる。

第 3 に（69）より η (t) の導関数、

$$\eta'(t) = \mu_1 \eta(t) > 0 \quad (71)$$

となり、η (t) は単調増加である。第 4 に（69）より η (t) の二階の導関数は、

$$\eta''(t) = \mu_1^2 \eta(t) < 0 \quad (72)$$

となり、η (t) は逓減的に増加する。第 5 に（69）より、

$$\lim_{t \to \infty} \eta(t) = 0 \quad (73)$$

が言える。関数 η (t) はゼロに収束する。

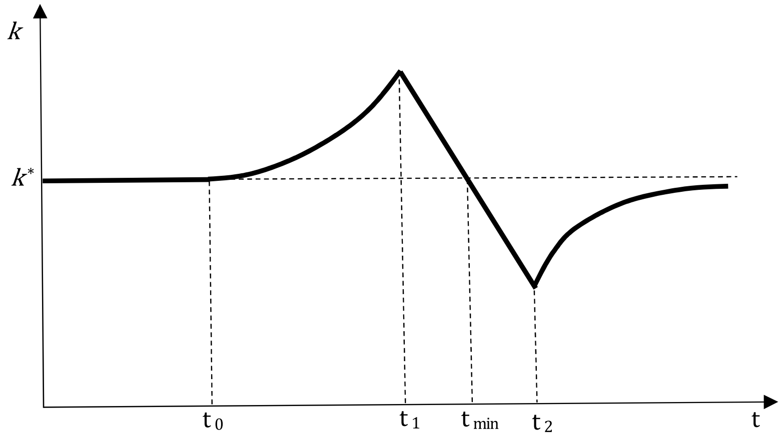
関数 η (t) の性質から、資本 k の動きは次のようになる。財政支出の増加が解除された直後より、資本 k は逓減的に増加を続け、最終的には定常均衡値 k^* に収束する。なお（68）、（69）、そして先に見た消費の経路 (44) と関数 ω(t) の定義 (45) から容易に確認できるように、この局面においては、次が成り立つ。

$$c - c^* = \mu_2(k - k^*) \quad (74)$$

(74) は、第 3 節で見た図 3（位相図）における定常均衡への収束経路を表す式である。すなわち、財政支出の増加の解除される時点において、それまで発散経路に乗っていた経済は、財政支出の増加前の体系における収束経路に復帰するのである。

以上に見た資本のダイナミックスを図示すると、次のようになる。

図 5　資本のダイナミックス



ただし時点t_1から時点t_2については、関数$\sigma(t)$の二階微係数の符号が明確でないので、直線でおよその動きだけ示してある。関数$\sigma(t)$は負の傾き、関数$\alpha(t)$と関数$\eta(t)$は正の傾きを持つので、資本kは連続的ではあるが滑らかには変化しない。

資本ストックの動きについて特徴的なことは、第１に、財政支出の将来の増加がアナウンスされてから実際に増加されるまでの間（時点t_0から時点t_1）において、資本蓄積が促進されていることである。これは、消費者が将来の財政支出の増加に伴う増税を見越して、実際に増加される前から消費を減少させるため、財市場に超過供給が発生して実質利子率が低下することによる。

第２に、循環的な動きが発生していることである。これは、財政支出の実際に増加されてからもとに戻るまでの間（時点t_1から時点t_2）において、消費の減少が財政支出の増加よりも少ないために（42を参照されたい）、財市場に超過需要が発生し、（実質）利子率が上昇することによる。財政支出がもとに戻った後は、財市場に超過供給が発生し、利子率が低下して資本ストックは増加に転ずることになる。

３－４．利子率のダイナミックス

利子率については（５）を財政支出の変化のアナウンスされる前（時点t_0以前）における定常均衡の近傍で線形近似すると、次のようになる。

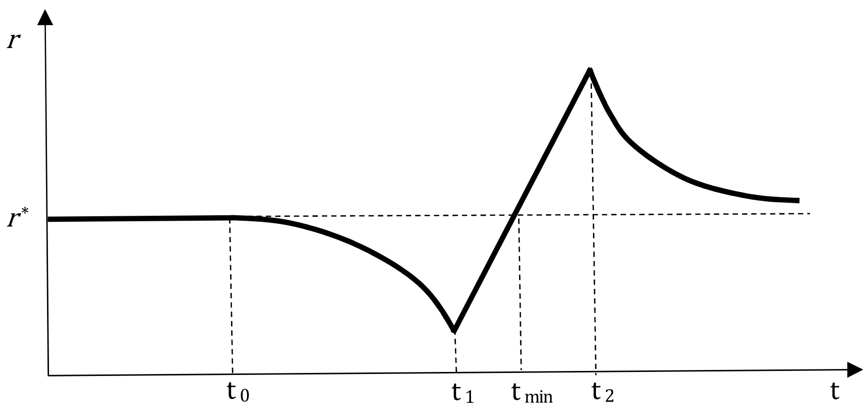
$$r - r^* = \delta(k - k^*) \quad (75)$$

ただしr^*は（６）で定義される利子率の定常値であり、δは次のように定義される。

$$\delta = f''(k^*) < 0 \quad (76)$$

前項の最後に述べたように、利子率は資本ストックと反対の動きを示すことが分かる。利子率のダイナミックスを図示すると図６のようになる。

図６　利子率のダイナミックス



３－５．財政支出の増加が恒常的な場合

財政支出の増加が恒常的な場合は、３－２項の②と③、および３－３項の②と③において、$t_2 \to \infty$と置けばよい。以下、順に見ることにしよう。

(i) $t_0 \leq t < t_1$のときの消費については、関数ϕの定義（25）より、

$$\lim_{t_2 \to \infty} \phi(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \left\{ \mu_2 e^{\mu_1(t - t_0)} - \mu_1 e^{\mu_2(t - t_0)} \right\} \quad (77)$$

が言える。(77) と (24) から、

$$c(t_0) = c^* - e^{-\mu_2(t_1 - t_0)}(G_H - G_L) \quad (78)$$

となる。将来の財政支出の増加がアナウンスされる時点（t_0）において、消費は下方にジャンプするが、その低下幅は財政支出の増加分よりも少ない。

(77) の右辺をtに関して微分することにより、$G_L < G_H$、$t_0 \leq t < t_1$、$\mu_1 < 0 < \mu_2$のもとで、

$$\phi'(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \mu_1 \mu_2 \left\{ e^{\mu_1(t - t_0)} - e^{\mu_2(t - t_0)} \right\} \leq 0 \quad (79)$$

が得られる（等号成立は$t = t_0$のときのみ)。(79) の右辺をさらにtに関して微分することにより、容易に$\phi''(t) < 0$になることを確認できる。

(ii) $t_1 \leq t$のときの消費については、関数λの定義（34）より、

$$\lim_{t_2 \to \infty} \lambda(t) = \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}(G_H - G_L) e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t - t_0)} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2}(G_H - G_L) e^{\mu_1(t - t_1)} - (G_H - G_L) \quad (80)$$

となる。時点t_1における関数λの値は、次のようになる。

$$\lambda(t_1) = -(G_H - G_L) \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_1 - \mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1 - \mu_2} e^{(\mu_1 - \mu_2)(t_1 - t_0)} \right\}$$

$$= -(G_H - G_L) \left[1 - \frac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} \left\{ 1 - e^{(\mu_1 - \mu_2)(t_1 - t_0)} \right\} \right] \quad (81)$$

(77) の右辺のtにt_1を代入して若干の変形を施せば、$\lambda(t_1) = \phi(t_1)$となることを確認できる。また$t_0 < t_1$、$\mu_1 < 0 < \mu_2$から、時点t_1における消費の減少は財政支出の増加分$G_H - G_L$よりも少ないことも分かる。

関数λの導関数については、次のことが言える。(80) より、

$$\lambda'(t) = \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}(G_H - G_L) \left\{ e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t - t_0)} - e^{\mu_1(t - t_1)} \right\}$$

$$= \frac{\mu_1 \mu_2}{\mu_1 - \mu_2}(G_H - G_L) \left\{ e^{(\mu_1 - \mu_2)(t_1 - t_0)} - 1 \right\} e^{\mu_1(t - t_1)} \quad (82)$$

となるが、$G_L<G_H$、$t_0<t_1$、$\mu_1<0<\mu_2$ であることから、$\lambda'(t)<0$ が言える。また（82）によれば、時点 t_1 における関数λの微係数は次のようになる。

$$\lambda'(t_1)=\frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1-\mu_2}(G_H-G_L)\left\{e^{(\mu_1-\mu_2)(t_1-t_0)}-1\right\}\quad(83)$$

（79）の右辺の t に t_1 を代入すれば $\lambda'(t_1)=\phi'(t_1)$ を確認できる。すなわち関数λと関数φは時点 t_1 において滑らかにつながる。さらに関数λの二階の導関数については（83）より、

$$\lambda''(t)=\mu_1\lambda'(t)>0\quad(84)$$

となり、関数λは逓増的に単調減少する。

最後に（80）より、次が言える。

$$\lim_{t\to\infty}\lambda(t)=-(G_H-G_L)\quad(85)$$

（85）と（33）より、時点 t_1 以降も消費は減少を続け、$c^*-(G_H-G_L)$ に漸近する。

以上の分析から、消費のダイナミックスを描くと、図７のようになる。

次に資本ストックのダイナミックスについてみよう。

(i) $t_0\leq t<t_1$ のときの資本については関数 $\alpha(t)$ の定義（56）より、

$$\lim_{t_2\to\infty}\alpha(t)=\frac{G_H-G_L}{\mu_1-\mu_2}e^{-\mu_2(t_1-t_0)}\left\{e^{\mu_1(t-t_0)}-e^{\mu_2(t-t_0)}\right\}\quad(86)$$

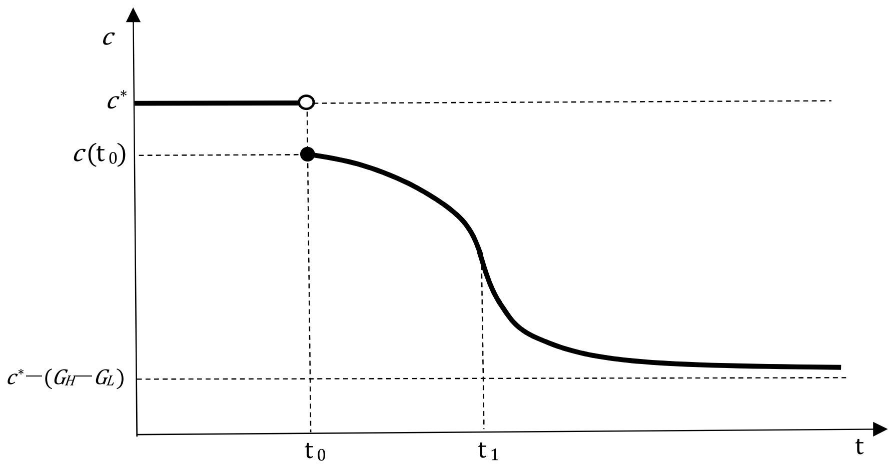
が言えるから、$G_L<G_H$、$t_0\leq t$、$\mu_1<0<\mu_2$ であることから、

$$\alpha(t)\geq 0\quad(87)$$

となることが分かる（等号成立は $t=t_0$ のとき）。

関数 $\alpha(t)$ の導関数については、（86）から $\alpha'(t)>0$ となることが容易に確認できる。いっぽう二

図７　消費のダイナミックス（財政支出の増加が恒久的な場合）



階の導関数については、

$$\alpha''(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \left\{ {\mu_1}^2 e^{\mu_1(t-t_0)} - {\mu_2}^2 e^{\mu_2(t-t_0)} \right\} \quad (88)$$

となるが、(59) を用いると $G_L < G_H$、$t_0 \leq t$、$\mu_1 < 0 < \mu_2$、$\beta > 0$ のもとで、

$$\alpha''(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} \left[{\mu_1}^2 \left\{ e^{\mu_1(t-t_0)} - e^{\mu_2(t-t_0)} \right\} - \beta(\mu_2 - \mu_1) e^{\mu_2(t-t_0)} \right] > 0 \quad (89)$$

となることが確認できる。すなわち資本は、この局面において逓増的に単調増加する。

(ii) $t_1 \leq t$ のときの資本については、関数 $\sigma(t)$ の定義 (62) より、

$$\lim_{t_2 \to \infty} \sigma(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t-t_0)} - \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} e^{\mu_1(t-t_1)} \quad (90)$$

となる。(90) 右辺の t へ t_1 を代入すれば、(86) の右辺により、次が確認できる。

$$\sigma(t_1) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t_1 - t_0)} - 1 \right\} = \alpha(t_1) \quad (91)$$

関数 $\sigma(t)$ の導関数については (90) の右辺より、$G_L < G_H$、$t_0 < t_1$、$\mu_1 < 0 < \mu_2$ のもとで、

$$\sigma'(t) = \frac{G_H - G_L}{\mu_1 - \mu_2} \left\{ e^{-\mu_2(t_1 - t_0)} e^{\mu_1(t_1 - t_0)} - 1 \right\} \mu_1 e^{\mu_1(t-t_1)} < 0 \quad (92)$$

となることが分かる。(92) の右辺から $\sigma''(t) > 0$ となることも容易に確認できる。最後に (90) の右辺から、$t \to \infty$ のとき $\sigma(t) \to 0$ となることも容易に確認できる。

以上から、この局面において資本ストックが逓増的に単調減少して、最終的にもとの定常解 k^* に収束することが言える。資本のダイナミックスを図示すると図 8 のようになる。

図 8 から直ちに分かるように、財政支出の増加がアナウンスされた時点から実際に増加されるま

図 8　資本のダイナミックス（財政支出の増加が恒久的な場合）

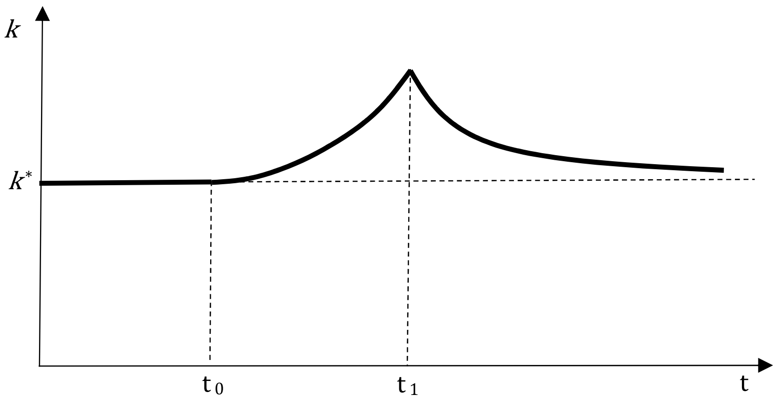
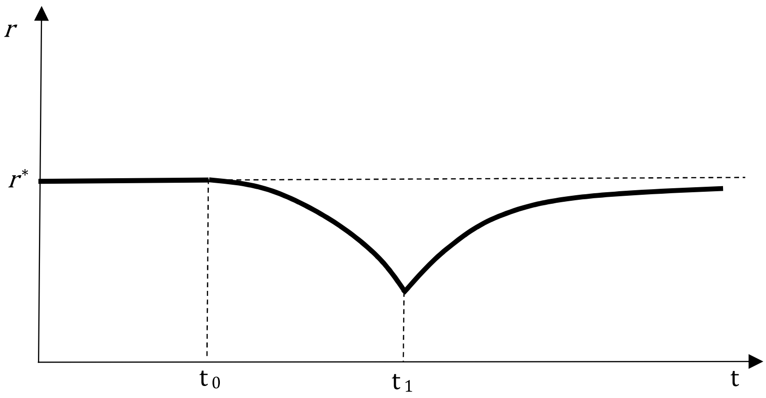


図9　利子率のダイナミックス（財政支出の増加が恒久的な場合）



での間（時点 t_0 から時点 t_1 までの間）、資本蓄積が促進されている（資本ストックがトレンド以上に増加している）。これは消費者が将来の増税を見越して、消費を（トレンド以下に）低下させることにより、財市場に超過供給が発生して実質利子率が低下するからである。実際に財政支出が増加された後は、消費の減少を財政支出の増加が上回るため、財市場に超過需要が発生して実質利子率が上昇し、資本は減少に転じ、最後はもとの定常解に収束する。しかし1人あたり資本がもとの定常解よりも低下することはなく、むしろ定常値よりも高い状態が続くことになる。

利子率については、上の議論から明らかなように、資本ストックと対称的な動きをする。すなわち、財政支出の増加がアナウンスされてから実際に増加するまでは低下を続け、財政支出の増加後は上昇してもとの定常値に戻る。図示すると図9のようになる。

4．結論

本論では、ラムゼイ・モデルにおいて予期された財政政策の経済に与える影響について、モデルの連立微分方程式体系を解析的に解くことによって厳密に検証した。ここでは、分析によって明らかとなった消費や投資のダイナミックスの持つ意味について、若干の議論をすることにしよう。

予期された財政支出の増加が、財政支出の影響に関する一般的な議論と大きく異なる点は、財政支出の増加がアナウンスされてから実際に財政支出が増加されるまでの間の経済の動きにある。すなわち一般的な静学のマクロ・モデルにおいては、財政支出の増加は実質利子率の上昇と資本ストックの減少をもたらすとされるが、動学的なラムゼイ・モデルにおいては、予期された財政支出の増加が実質利子率の低下と資本蓄積の促進をもたらすのである。

こうした相違の発生する理由は、消費者の動学的な意思決定にある。将来の財政支出の増加は将来の増税を伴っているので、合理的な消費者は、財政支出の実際に増加する前から消費水準を漸進的に減らし始めるために、財市場に超過供給が発生し、実質利子率が低下して資本蓄積が促進され

ることになる。

財政支出が実際に増加されると、財政支出の増加分は消費の減少分を上回るため、財市場に超過需要が発生して利子率が上昇し、資本は減少し始めることになる。財政支出の増加が一時的な場合には、恒常的な場合よりも消費者の消費の減少が抑えられるため[3)]、財市場の超過需要がより大きくなり、資本の減少が大きくなって循環的な動きを示すことになる。

参考文献

河合正弘［1986］『国際金融と開放マクロ経済学』、東洋経済新報社。

斎藤孝［2019］「ラムゼイ・モデルにおいて財政支出が消費・投資・利子率に与える影響について ― 解析的に解く ―」東洋大学経済研究会『経済論集』第45巻１号　pp.11-29。

田辺行人・藤原毅夫［1981］『常微分方程式』、東京大学出版会。

Barro, Robert, J.［1987］"Government Spending, Interest rates, Prices, and Budget Deficits in the United Kingdom. 1701-1918", *Journal of Monetary Economics* 20 (September) pp.221-247.

Ljungqvist, Lars and Sargent, Thomas, J.［2018］*Recursive Economic Theory Fourth Edition*. The MIT Press.

Romer, David.［2012］*Advanced Macro Economics Fourth edition*. McGraw-Hill.

３）この点については、財政支出の増加される時点t_1における関数λの値（35）が、財政支出の増加の解除される時点t_2の減少関数になっていることから確認できる。