公共財供給ゲームにおける交互支払均衡

鮫 島 裕 輔

目 次

1. はじめに

本稿は、二人のプレイヤーが公共財供給のために自発的に寄付を行うというゲームを考察する。二人で供給する公共財とは、例えば、共著で論文を執筆するといった共同作業などである。こうした共同作業では、一人一人の貢献（寄付）が積み重なって、それが一定水準（公共財供給にかかる総費用）を越えると論文（公共財）が完成し、そこから得られる便益を二人が享受することになる。ゲームでは、公共財完成までに必要な総費用はあらかじめ定まっているものとする。まず第1期にプレイヤー1がいくらか好きなだけ寄付を行い、第2期にはプレイヤー2も好きなだけ寄付をする。第3期には再びプレイヤー1が寄付をする手番となり、その次の期はプレイヤー2の手番、と続いていく。やがて二人が支払った寄付金の合計が公共財の総費用に達した時点で公共財は完成し、ゲームは終わる。公共財から得られる便益の大きさはプレイヤーごとにあらかじめ決まっているが、もし充分な寄付が永遠に集まらずに公共財が完成しない場合は、公共財の便益は得られない。また、支払われた寄付金は返却されることはなく、埋没費用となる。

このような自発的寄付ゲームを分析した研究としては、 Admati and Perry (1991) が挙げられる。彼らが考察したゲームの均衡では、寄付金が埋没費用となる場合、プレイヤー達は交互に少額ずつ寄付をするという支払いパターンが実現し、寄付金が埋没費用にならない場合には、プレイヤー達は多額を一括して寄付するという支払いパターンが実現する。この二つの場合を比較

して、Admati and Perry は寄付金が埋没費用になるという点が少額ずつ交互に寄付されるという支払いパターンを生むのではないかと指摘している。実際、現実の共同作業においても、少しずつ交互に貢献を積み重ねていくという「少額交互支払いパターン」は多くみられ、その「貢献」は埋没費用であることが多い。

しかし、このような Admati and Perry の指摘に対して、Compte and Jehiel (2003) は、「寄付金が埋没費用であったとしても、少額ずつ交互に寄付されるという支払いパターンに必ずしもなるわけではない」と指摘した。Compte and Jehiel が分析した自発的寄付ゲームも Admati and Perry と同様に寄付金は埋没費用であるものの、その均衡での支払パターンでは、各プレイヤーがせいぜい 1 回だけ寄付金を支払うという「一括支払いパターン」になる。Admati and Perry のモデルと Compte and Jehiel のモデルの違いは 2 点ある。第一に、便益の非対称性である。Admati and Perry のモデルでは各プレイヤーが公共財から得られる便益は等しいと想定していたのに対して、Compte and Jehiel のモデルでは便益の大きさが非対称であることを想定している。第二は、線形な費用関数である。寄付金から公共財を作る際に使われる費用関数について、Admati and Perry は厳密に凸な関数を仮定しているのに対して、Compte and Jehiel は線形関数を仮定している。この 2 点の違いによって、Compte and Jehiel のモデルにおけるゲームの均衡では「少額交互支払いパターン」は実現しない。

本稿では、Compte and Jehiel のモデルと同様に、プレイヤー間での便益の非対称性と線形な費用関数を仮定しつつ、さらに二つの条件を考慮する。第一は、支払単位の不可分性である。寄付金の支払手段である貨幣の最低単位は通常「1」であって、これより小さい金額を支払うことはできない。あるいは寄付金の支払いには「一口いくら」という制約が設けられていることがあり、この場合も支払金額は離散的にしか選べない。この点は、Compte and Jehiel が「支払金額を連続的に選べる」としていたのと異なっている。第二は割引因子が充分に 1 に近いという条件である。寄付金の支払い時期よりも公共財の完成時期が後になる場合は公共財の便益を割り引いて考えるべきだが、本稿では便益の割引率が小さい（割引因子が大きい）ケース、すなわち将来の便益も現在の便益とほとんど同等に評価するようなケースに注目する。

本稿は以上の 2 つの条件を加えて Compte and Jehiel のモデルにおけるゲームを分析し、「少額交互支払いパターン」が実現する均衡が存在することを示す。Compte and Jehiel のモデルでは、割引因子の値に拘わらず均衡はただ一つだけ存在し、均衡では「一括支払いパターン」しか実現しなかった。しかし、彼らのモデルに支払単位の不可分性を導入すると、割引因子が充分に 1 に近い場合に複数の均衡が存在することになり、その中に「少額交互支払いパターン」を実現するものが現れる。「少額交互支払いパターン」が「一括支払いパターン」よりも興味深いと考えられる理由としては、前者における費用分担がより公平になる点が挙げられる。Compte and

Jehiel のモデルにおける「一括支払いパターン」の均衡では、片方のプレイヤーだけが多額の費用を負担することになり、そのプレイヤーの利得はゼロにまで落ち込む。このような費用分担は不公平であると考えられる。現実には、2 人で費用を負担する際は同額に近い形で折半され、2 人とも結果的にプラスの利得を得ることが多いのではないかと思われる。本稿のモデルにおける「少額交互支払いパターン」の均衡では、そのような比較的公平と思われる費用分担が実現する。

本稿の構成は以下の通りである。第 2 節では、モデルを説明する。第 3 節では、均衡を提示する。第 4 節では、結論を述べる。

2. モデル

本稿では Admati and Perry (1991) や Compte and Jehiel (2003) と同様の、公共財供給のための自発的寄付ゲームを考える。ゲームに参加するプレイヤーは、プレイヤー 1 とプレイヤー 2 の 2 人である。公共財が完成すると、その時点でプレイヤー 1 は $V_1 > 0$ の便益、プレイヤー 2 は $V_2 > 0$ の便益を得て、ゲームが終了する。

公共財完成のために必要な寄付金の総額を $K > 0$ とする。ゲームでは、まず第 1 期にプレイヤー 1 が寄付を行い、続く第 2 期はプレイヤー 2 が寄付をする。以降、奇数期にはプレイヤー 1、偶数期にはプレイヤー 2 というように交互に寄付を行っていく。プレイヤー i が第 t 期に行う寄付の金額は $c_i^t \geq 0$ と表記する。ただし、各プレイヤーは自分の手番でない期については寄付を行えないものとして、$k = 1, 2, \ldots$ について、$c_1^{2k} = 0$ および $c_2^{2k-1} = 0$ とする。公共財が完成する期、すなわちゲームが終了する期を第 T 期とする。T は $\sum_{t=1}^{T-1}(c_1^t + c_2^t) < K \leq \sum_{t=1}^{T}(c_1^t + c_2^t)$ を満たす自然数である。もし充分な寄付金が集まらずに永遠に公共財が完成しない場合には、便宜上 $T = \infty$ とする。支払われた寄付金は埋没費用となり、公共財が完成しない場合も返却されることはない。

各プレイヤーは将来の便益と寄付金支出を割引因子 $\delta \in (0, 1)$ で割り引くものとする。するとプレイヤー i がゲーム全体で得る利得の第 1 期時点での現在価値 U_i は、

$$U_i = \delta^{T-1} V_i - \sum_{t=1}^{T} \delta^{t-1} c_i^t$$

と書くことができる。公共財が永遠に完成しない場合、プレイヤーがゲーム全体で得る利得は 0 を上回ることはない。

プレイヤー i の戦略とは、自分の各手番でいくら寄付をするかを、全ての手番、任意の経路を辿った場合について、あらかじめ示したものである。すなわち、プレイヤー i の戦略は、自分の手番となる任意の第 τ 期（ただし $\sum_{t=1}^{\tau-1}(c_1^t + c_2^t) < K$）について、第 $\tau - 1$ 期までの寄付金の

数列 $(\{c_1^t\}_{t=1}^{\tau-1}, \{c_2^t\}_{t=1}^{\tau-1})$ が与えられた時に選ぶ寄付金額 c_i^τ を定めたものである。

以上のモデルは Compte and Jehiel (2003) に従っている。このモデルに、本稿では、K は自然数、$\{c_i^t\}_{i=1,2;t=1,2,\ldots}$ は 0 以上の整数という仮定を置く。これは支払いの最小単位が 1 であることを仮定したものである。支払単位の最小単位が 1 でない状況（例えば「一口いくら」という制約が設けられている場合など）も考えうるが、$\{V_i\}_{i=1,2}$ と K と $\{c_i^t\}_{i=1,2;t=1,2,\ldots}$ のスケールを適切に調節することによって最小単位が 1 となるようにモデルを読み替えることができる。なお、$\{V_i\}_{\{i=1,2\}}$ は整数とは仮定しないが、V_i より小さい整数のうち最大のものを v_i と表記する。つまり $0 < V_i - v_i \leq 1$ が成り立つ。

このような「支払単位の不可分性」を仮定すると、このゲームの部分ゲーム完全均衡は、Compte and Jehiel (2003) が求めた部分ゲーム完全均衡とは異なったものになる。本節の残りの部分で不可分性を仮定しない場合の均衡経路と、不可分性を仮定した場合に存在する均衡経路を比較しておく。

例 1 (Compte and Jehiel, 2003). 支払金額に 0 以上の任意の実数を選べるとする。また、$K > V_1 > V_2 > 0$ かつ $K < V_1 + \delta V_2$ とする。この時、部分ゲーム完全均衡は唯一つ存在し、その均衡経路では、第 1 期にプレイヤー 1 は寄付をせず、第 2 期にプレイヤー 2 は $K - V_1$ だけ寄付をして、第 3 期にプレイヤー 1 が V_1 の寄付をして公共財が完成し、ゲームが終了する。

この均衡では、各プレイヤーは 1 回だけしか寄付をせず、またその金額は多額になる可能性もある。さらに、場合によってはプレイヤー間で不公平と思われる費用分担となる。例えば、$K = 101, V_1 = 100, V_2 = 99, \delta = 0.99995$ である場合、均衡では、プレイヤー 1 の寄付金額は 100 でプレイヤー 2 の寄付金額は 1 となる。均衡におけるプレイヤー 1 の利得は 0 である一方、プレイヤー 2 の利得は 97.995 である。

例 2 (支払単位の不可分性を仮定した場合：少額交互支払均衡). 支払金額に 0 以上の任意の整数のみを選べるとする。また、$v_1 > v_2 \geq 2$ かつ $K \leq v_1 + v_2 - 2$ とする。この時充分に 1 に近い $\delta \in (0,1)$ に対して、第 1 期にプレイヤー 1 が $\max\{1, K - 2(v_2 - 1)\}$ を寄付をして、第 2 期からはプレイヤー 2 とプレイヤー 1 が交互に 1 ずつ寄付を続けて公共財が完成する、という均衡経路を持つ部分ゲーム完全均衡が存在する。

この均衡では、プレイヤー 1 は最大 v_2 回、プレイヤー 2 は最大 $v_2 - 1$ 回寄付をする。第 1 期はプレイヤー 1 がまとまった金額を寄付する可能性があるが、それ以降の期は両プレイヤーが交互に少しずつ支払う。また、交互に支払いが行われることから、費用分担は公平なものになりやすい。例えば、 $K = 101, V_1 = 100, V_2 = 99, \delta = 0.99995$ である場合、この均衡では、プレイヤー 1 から始まって両プレイヤーが 1 ずつ寄付をして第 101 期に公共財が完成する。この時、プ

レイヤー1の寄付金額の合計は51でプレイヤー2の寄付金額の合計は50となり、負担割合はほぼ等しくなる。この均衡におけるプレイヤー1の利得は48.629、プレイヤー2の利得は48.631となり、利得の面からみてもほぼ公平であるといえる。

このように、本数値例では支払単位の不可分性を仮定しない場合とする場合とでは、均衡における費用分担割合と各プレイヤーの利得水準が大きく異なる。次節では、支払単位の不可分性を仮定した場合に、例2に示した均衡が存在することを示す。

3. 分析

本節では、支払単位の不可分性を仮定すると、充分に割引因子が1に近い場合に「少額交互支払均衡」が存在することを証明する。本稿のモデルのゲームでは、部分ゲーム完全均衡が複数存在しうる。本節では、まずプレイヤー1にとって不利な均衡、プレイヤー2にとって不利な均衡が存在することを示す。そのうえで、「少額交互支払均衡」の均衡経路から外れることを選んだプレイヤーにとって自分に不利な均衡経路に移行する[*1]ことになるような戦略の組み合わせを示し、それが「少額交互支払均衡」となることを証明する。

以下の議論では、支払金額に0以上の整数のみを選べることを仮定する。第τ期初において、公共財が未完成な場合に、完成までに必要な寄付金額を「第τ期初における残額」と呼ぶことにし、$X_\tau = K - \sum_{t=1}^{\tau-1}(c_1^t + c_2^t)$と表記する。公共財が未完成である間は$X_\tau \geq 1$が成り立つ。また、$X_1 = K$とする。

まずプレイヤー1にとって不利な均衡の存在を示す。

命題1 (プレイヤー1に不利な均衡). $v_1 \geq 1$であり、$\delta \in (0,1)$が条件$\delta \geq (V_2 - 1)/V_2$を満たすほどに充分に1に近いならば、次に示すプレイヤー1の戦略S_1とプレイヤー2の戦略S_2の組み合わせは部分ゲーム完全均衡になる。

(S_1) プレイヤー1は、第τ期($\tau \geq 1$は任意の奇数)における自分の手番では、もし$1 \leq X_\tau \leq v_1$ならば$c_1^\tau = X_\tau$を選び、もし$X_\tau > v_1$ならば$c_1^\tau = 0$を選ぶ。

(S_2) プレイヤー2は、第τ期($\tau \geq 2$は任意の偶数)における自分の手番では、もし$1 \leq X_\tau \leq v_1$または$X_\tau > v_1 + \delta V_2$ならば$c_2^\tau = 0$を選び、もし$X_\tau \in (v_1, v_1 + \delta V_2]$ならば$c_2^\tau = X_\tau - v_1$を選ぶ。

[*1] 望ましい均衡経路を実現するために、「逸脱すると不利な均衡経路に移行する」ような均衡戦略を構築する方法は、「囚人のジレンマゲーム」の無限回繰り返しゲームで「協力状態を維持する均衡」の存在を示すためにも用いられる手法である。

証明. まず、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1 はプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっていることを示す。この部分ゲームの始点を第 τ 期とする。第 τ 期より前に支払われた寄付金は埋没費用であるから、第 τ 期における合理的な意思決定には影響しない。以下では、第 τ 期以降にプレイヤー 1 が得る利得の第 τ 期時点での現在価値を考える。プレイヤー 2 の戦略 S_2 は与件とする。

第一に、$1 \leq X_\tau \leq v_1$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 1 が戦略 S_1 に従って $c_1^\tau = X_\tau$ とすると、公共財は第 τ 期に完成し、プレイヤー 1 は利得 $V_1 - X_\tau > 0$ を得る。この値は公共財が永遠に完成しない場合の利得を上回る。また、プレイヤー 1 が第 τ 期に公共財を完成させなかったとしても、その後のプレイヤー 2 は戦略 S_2 に従う限り支払うことはない。結局、公共財を完成させようとするならばプレイヤー 1 が残額 X_τ 以上を支払うことになるが、完成時期を延期するような戦略をプレイヤー 1 がとったとしても、そのときの利得は割引因子 δ が 1 より小さいために第 τ 期に完成させたときに得られる利得 $V_1 - X_\tau$ を下回ることになる。例えば、もしプレイヤー 1 が第 τ 期に残額の一部 $c_1^\tau \in [0, X_\tau)$ だけを支払うと、第 $\tau+1$ 期にはプレイヤー 2 が支払わないので、公共財の完成時期は早くても第 $\tau+2$ 期である。第 $\tau+2$ 期に残額を過不足なく支払って公共財を完成するとした場合 $c_1^{\tau+2} = X_\tau - c_1^\tau$ であるので、プレイヤー 1 の利得の第 τ 期時点での現在価値は、

$$-c_1^\tau + \delta^2(V_1 - c_1^{\tau+2}) = -c_1^\tau + \delta^2(V_1 - X_\tau + c_1^\tau) = \delta^2(V_1 - X_\tau) - (1-\delta^2)c_1^\tau$$

であり、戦略 S_1 に従った時の利得 $V_1 - X_\tau$ を下回る。このように完成時期を第 $\tau+2$ 期以降に延期するような戦略をプレイヤー 1 がとった場合、上式の「プラスの項」$(V_1 - X_\tau)$ にかかる「割引因子の係数」δ の指数が 2 以上になるが、$\delta < 1$ であるため、式全体の値が $V_1 - X_\tau$ を上回ることはない。以上の議論から、$1 \leq X_\tau \leq v_1$ である場合、プレイヤー 1 の戦略 S_1 はプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっている。

第二に、$X_\tau \in (v_1, v_1 + \delta V_2]$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 1 が戦略 S_1 に従うと、まず第 τ 期に $c_1^\tau = 0$ とした後、プレイヤー 2 が第 $\tau+1$ 期に $c_2^{\tau+1} = X_\tau - v_1$ だけ支払い、その後プレイヤー 1 が第 $\tau+2$ 期に $c_1^{\tau+2} = v_1$ を支払って公共財が完成する。この時のプレイヤー 1 の利得の第 τ 期時点での現在価値は $\delta^2(V_1 - v_1) > 0$ である。この値は公共財が永遠に完成しない場合の利得を上回る。なお、本段落の場合では、プレイヤー 2 の戦略 S_2 を与件とすると第 $\tau+2$ 期に残額が v_1 以下となるので、前段落の議論より、第 $\tau+2$ 期以降プレイヤー 1 の戦略 S_1 は戦略 S_2 に対して最適反応になる。そこで以下では第 τ 期においてプレイヤー 1 が戦略 S_1 に従うことが最適かどうかを検討する。もしプレイヤー 1 が第 τ 期に正の額 $c_1^\tau \in (0, X_\tau - v_1]$ を支払った場合、プレイヤー 2 が第 $\tau+1$ 期に $c_2^{\tau+1} = X_{\tau+1} - v_1$ だけ支払っ

た後、第 $\tau+2$ 期にプレイヤー 1 の手番となり、これ以降プレイヤー 1 は S_1 に従うことが最適となる。この時のプレイヤー 1 の利得の第 τ 期時点での現在価値は $-c_1^\tau+\delta^2(V_1-v_1)$ であり、戦略 S_1 に従った時の利得を下回る。もしプレイヤー 1 が第 τ 期に $c_1^\tau \in (X_\tau - v_1, \infty)$ を支払った場合、その後にプレイヤー 2 が支払うことはないので、公共財を完成させようとするならばプレイヤー 1 が残額を全て負担することになる。この時プレイヤー 1 は第 τ 期以降に合計 X_τ 以上を支払うことになるが、$X_\tau > v_1$ ゆえに $X_\tau \geq V_1$ であることから第 τ 期時点での利得の現在価値は明らかに 0 以下である。以上の議論から、$X_\tau \in (v_1, v_1+\delta V_2]$ である場合、プレイヤー 1 の戦略 S_1 はプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっている。

第三に、$X_\tau > v_1+\delta V_2$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 1 が戦略 S_1 に従うと、その後にプレイヤー 2 が支払うことはないので、公共財は永遠に完成することはなく、プレイヤー 1 の利得は 0 となる。もしプレイヤー 1 が戦略 S_1 に従わない場合に起こりうる結果は、公共財が「永遠に完成しない」か「いつか完成する」かのいずれかであるが、前者の場合「プラスの便益」が発生することはないのでプレイヤー 1 の利得は 0 を上回らない。そこで公共財を完成させようとすると、プレイヤー 2 は戦略 S_2 のもとでは自分の手番における残額が $v_1+\delta V_2$ を上回る限り支払いをすることはないので、プレイヤー 1 は少なくとも $X_\tau - v_1 - \delta V_2$ 以上の額を累計で支払う必要がある。この額を支払う際、何期かに分けて支払うと公共財の完成時期が遅くなり、割引によって便益の現在価値が小さくなるので、プレイヤー 1 は支払うとすれば第 τ 期にまとめて支払ったほうがよい。そこで以下では第 τ 期においてプレイヤー 1 が $X_\tau - v_1 - \delta V_2$ 以上支払う場合の利得を検討する。なお、この時プレイヤー 2 の戦略 S_2 のもとでは第 $\tau+2$ 期の残額が v_1 以下となるので、前々段落の議論より、第 $\tau+2$ 期以降はプレイヤー 1 の戦略 S_1 が戦略 S_2 に対して最適反応になる。もしプレイヤー 1 が第 τ 期に $c_1^\tau \in [X_\tau - v_1 - \delta V_2, X_\tau - v_1]$ を支払うと、第 $\tau+2$ 期のプレイヤー 1 の手番では $X_{\tau+2} = v_1$ となり、その後最適な戦略である S_1 をとったとした場合のプレイヤー 1 の利得の第 τ 期時点での現在価値は、

$$-c_1^\tau+\delta^2(V_1-v_1)<0$$

となり、戦略 S_1 に従った時の利得 0 を下回る。上式の不等号が成立する理由は、$c_1^\tau \geq X_\tau - v_1 - \delta V_2 > 0$ であること並びに c_1^τ が整数であることから $c_1^\tau \geq 1$ が成り立ち、さらに v_1 の定義から $V_1 - v_1 \leq 1$ であるためである。もしプレイヤー 1 が第 τ 期に $c_1^\tau \in (X_\tau - v_1, \infty)$ を支払うと、その後にプレイヤー 2 が支払うことはないので、公共財を完成させようとするならばプレイヤー 1 が残額を全て負担することになる。この時プレイヤー 1 は第 τ 期以降に合計 X_τ 以上を支払うことになるが、$X_\tau > v_1$ ゆえに $X_\tau \geq V_1$ であることから第 τ 期時点での利得の現在価値は明らかに 0 以下である。以上の議論から、$X_\tau > v_1+\delta V_2$ である場合、プレイヤー 1 の戦略 S_1

はプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっている。

ここまで、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1 はプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっていることを示した。次に、プレイヤー 2 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 2 の戦略 S_2 がプレイヤー 1 の戦略 S_1 に対して最適反応になっていることを示す。この部分ゲームの始点を第 τ 期とする。第 τ 期より前に支払われた寄付金は埋没費用であるから、第 τ 期における合理的な意思決定には影響しない。以下では、第 τ 期以降にプレイヤー 2 が得る利得の第 τ 期時点での現在価値を考える。プレイヤー 1 の戦略 S_1 は与件とする。

第一に、$1 \leq X_\tau \leq v_1$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 2 が戦略 S_2 に従って $c_2^\tau = 0$ とすると、第 $\tau + 1$ 期にプレイヤー 1 が公共財を完成させるので、プレイヤー 2 の利得の第 τ 期時点での現在価値は δV_2 である。もしプレイヤー 2 が第 τ 期に残額の一部 $c_2^\tau \in [0, X_\tau)$ だけを支払った場合、やはり第 $\tau + 1$ 期にプレイヤー 1 が公共財を完成させるので、プレイヤー 2 の利得の第 τ 期時点での現在価値は、$-c_2^\tau + \delta V_2$ となるが、この値は戦略 S_2 に従った時の利得 δV_2 を上回ることはない。もしプレイヤー 2 が第 τ 期に残額の全部 X_τ 以上を支払った場合、第 τ 期に公共財が完成し、プレイヤー 2 の利得は $V_2 - X_\tau$ 以下となる。ここで、δ が条件 $\delta \geq (V_2 - 1)/V_2$ を満たすことを考慮すると、

$$\delta \geq (V_2 - 1)/V_2 \qquad \Leftrightarrow \qquad \delta V_2 \geq V_2 - 1 \qquad \Rightarrow \qquad \delta V_2 \geq V_2 - X_\tau$$

となるので、プレイヤー 2 が第 τ 期に残額の全部 X_τ を支払った場合の利得（最後の不等式の右辺）が戦略 S_2 に従った場合の利得（同左辺）を上回ることはない。以上の議論から、$1 \leq X_\tau \leq v_1$ である場合、プレイヤー 2 の戦略 S_2 はプレイヤー 1 の戦略 S_1 に対して最適反応になっている。

第二に、$X_\tau \in (v_1, v_1 + \delta V_2]$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 2 が戦略 S_2 に従って $c_2^\tau = X_\tau - v_1$ とすると、第 $\tau + 1$ 期にプレイヤー 1 が公共財を完成させるので、プレイヤー 2 の利得の第 τ 期時点での現在価値は、

$$-c_2^\tau + \delta V_2 = -X_\tau + v_1 + \delta V_2 \geq 0$$

となり、公共財が永遠に完成しない場合の利得を下回ることはない。もしプレイヤー 2 が戦略 S_2 に従わない場合に起こりうる結果は、公共財が「永遠に完成しない」か「いつか完成する」かのいずれかであるが、前者の場合「プラスの便益」が発生することはないのでプレイヤー 2 の利得は 0 を上回らない。そこで公共財を完成させようとすると、プレイヤー 1 は戦略 S_1 のもとでは自分の手番における残額が v_1 を上回る限り支払いをすることはないので、プレイヤー 2 は少なくとも $X_\tau - v_1$ 以上の額を累計で支払う必要がある。また、この額をプレイヤー 2 が支払いさ

えすれば、第 $\tau+1$ 期にプレイヤー 1 が公共財を完成させる。この額を支払う際、何期かに分けて支払うと公共財の完成時期が遅くなり、割引によって便益の現在価値が小さくなるので、プレイヤー 2 は支払うとすれば第 τ 期にまとめて支払ったほうがよい。そこで以下では第 τ 期においてプレイヤー 2 が $X_\tau - v_1$ 以上支払う場合の利得を検討する。もしプレイヤー 2 が第 τ 期に $c_2^\tau \in [X_\tau - v_1, X_\tau)$ を支払うと、プレイヤー 2 の利得の第 τ 期時点での現在価値は $-c_2^\tau + \delta V_2$ となるが、

$$-c_2^\tau + \delta V_2 \leq -X_\tau + v_1 + \delta V_2$$

が成り立つので、戦略 S_2 に従った時の利得（上式の右辺）を上回らない。もしプレイヤー 2 が第 τ 期に残額の全部 X_τ 以上を支払った場合、第 τ 期に公共財が完成し、プレイヤー 2 の利得は $V_2 - X_\tau$ 以下となる。ここで、$v_1 \geq 1$ であること、および δ が条件 $\delta \geq (V_2-1)/V_2$ を満たすことを考慮すると、

$$\delta \geq (V_2-1)/V_2 \quad \Rightarrow \quad \delta \geq (V_2-v_1)/V_2 \quad \Leftrightarrow \quad \delta V_2 \geq V_2-v_1 \quad \Leftrightarrow \quad -X_\tau+v_1+\delta V_2 \geq V_2-X_\tau$$

となるので、プレイヤー 2 が第 τ 期に残額の全部 X_τ を支払った場合の利得（最後の不等式の右辺）が戦略 S_2 に従った場合の利得（同左辺）を上回ることはない。以上の議論から、$X_\tau \in (v_1, v_1 + \delta V_2]$ である場合、プレイヤー 2 の戦略 S_2 はプレイヤー 1 の戦略 S_1 に対して最適反応になっている。

第三に、$X_\tau > v_1 + \delta V_2$ である場合を考える。この時、もしプレイヤー 2 が戦略 S_2 に従うと、その後にプレイヤー 1 が支払うことはないので、公共財は永遠に完成することはなく、プレイヤー 2 の利得は 0 となる。もしプレイヤー 2 が戦略 S_2 に従わない場合に起こりうる結果は、公共財が「永遠に完成しない」か「いつか完成する」かのいずれかであるが、前者の場合「プラスの便益」が発生することはないのでプレイヤー 2 の利得は 0 を上回らない。そこで公共財を完成させようとすると、前段落の議論からプレイヤー 2 の利得は $-X_\tau + v_1 + \delta V_2$ を上回ることはないが、この値は 0 より小さい。以上の議論から、$X_\tau > v_1 + \delta V_2$ である場合、プレイヤー 2 の戦略 S_2 はプレイヤー 1 の戦略 S_1 に対して最適反応になっている。

これまでの議論から、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1 がプレイヤー 2 の戦略 S_2 に対して最適反応になっており、さらにプレイヤー 2 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、S_2 が S_1 に対して最適反応になっていることが示された。ゆえに、任意の部分ゲームにおいて (S_1, S_2) という戦略の組み合わせは互いに最適反応になっている[*2]ので、(S_1, S_2) は部分ゲーム完全均衡である。（証明終）

[*2] これを証明するために、例えば、プレイヤー 1 の手番から始まるある部分ゲームについて、プレイヤー 2 の戦略

プレイヤー2の手番から始まる任意の部分ゲーム（この部分ゲームの始点を第 τ 期とする）を考えるとき、「プレイヤー1に不利な均衡」 (S_1, S_2) において、各プレイヤーが得る利得の第 τ 期時点での現在価値は以下の通りである。第一に、$1 \leq X_\tau \leq v_1$ である場合は、プレイヤー1の利得は $\delta(V_1 - X_\tau)$、プレイヤー2の利得は δV_2 である。第二に、$X_\tau \in (v_1, v_1 + \delta V_2]$ である場合は、プレイヤー1の利得は $\delta(V_1 - v_1)$、プレイヤー2の利得は $-X_\tau + v_1 + \delta V_2$ である。第三に、$X_\tau > v_1 + \delta V_2$ である場合は、プレイヤー1の利得もプレイヤー2の利得も0である。

次にプレイヤー2にとって不利な均衡の存在を示す。

命題 2 (プレイヤー **2** に不利な均衡)**.** $v_2 \geq 1$ であり、$\delta \in (0,1)$ が条件 $\delta \geq (V_1 - 1)/V_1$ を満たすほどに充分に1に近いならば、次に示すプレイヤー1の戦略 S_1' とプレイヤー2の戦略 S_2' の組み合わせは部分ゲーム完全均衡になる。

(S_1') プレイヤー1は、第 τ 期 ($\tau \geq 1$ は任意の奇数) における自分の手番では、もし $1 \leq X_\tau \leq v_2$ または $X_\tau > v_2 + \delta V_1$ ならば $c_1^\tau = 0$ を選び、もし $X_\tau \in (v_2, v_2 + \delta V_1]$ ならば $c_1^\tau = X_\tau - v_2$ を選ぶ。

(S_2') プレイヤー2は、第 τ 期 ($\tau \geq 2$ は任意の偶数) における自分の手番では、もし $1 \leq X_\tau \leq v_2$ ならば $c_2^\tau = X_\tau$ を選び、もし $X_\tau > v_2$ ならば $c_2^\tau = 0$ を選ぶ。

証明. 命題1の証明と同様の議論を、プレイヤー1とプレイヤー2の立場を入れ替えて展開すればよい。 (証明終)

プレイヤー1の手番から始まる任意の部分ゲーム（この部分ゲームの始点を第 τ 期とする）を考えるとき、「プレイヤー2に不利な均衡」 (S_1', S_2') において、各プレイヤーが得る利得の第 τ 期時点での現在価値は以下の通りである。第一に、$1 \leq X_\tau \leq v_2$ である場合は、プレイヤー1の利得は δV_1、プレイヤー2の利得は $\delta(V_2 - X_\tau)$ である。第二に、$X_\tau \in (v_2, v_2 + \delta V_1]$ である場合は、プレイヤー1の利得は $-X_\tau + v_2 + \delta V_1$、プレイヤー2の利得は $\delta(V_2 - v_2)$ である。第三に、$X_\tau > v_2 + \delta V_1$ である場合は、プレイヤー1の利得もプレイヤー2の利得も0である。

次に、本稿のテーマである「少額交互支払均衡」の存在を示す。この均衡は、「少額交互支払均衡」の均衡経路から外れることを選んだプレイヤーにとって自分に不利な均衡経路に移行することになるような戦略の組み合わせとなっている。

S_2 がプレイヤー1の戦略 S_1 に対して最適反応ではないと仮定しよう。すると、この部分ゲームに含まれるプレイヤー2の意思決定点のうち S_2 に従うことが最適ではない点が存在する。しかし、この意思決定点から始まる部分ゲームはプレイヤー2の手番から始まる部分ゲームなので既に証明した通り S_2 が最適反応になるはずであり、矛盾が生じる。

命題 3 (少額交互支払均衡). $v_1 > v_2 \geq 2$ かつ $K \leq v_1 + v_2 - 2$ とする。また、経路 P およびプレイヤー 1 の戦略 S_1'' とプレイヤー 2 の戦略 S_2'' を次のように定義する。

(P) 第 1 期にプレイヤー 1 が $\max\{1, K-2(v_2-1)\}$ を寄付をして、第 2 期から公共財が完成する第 T 期までは、プレイヤー 2 とプレイヤー 1 が交互に 1 ずつ寄付を続ける。(第 T 期に寄付をするのは、T が奇数ならばプレイヤー 1、T が偶数ならばプレイヤー 2 である。)

(S_1'') プレイヤー 1 は、第 1 期は $\max\{1, K-2(v_2-1)\}$ 寄付する。第 τ 期（$\tau \geq 3$ は任意の奇数）における自分の手番で公共財が未完成である（$X_\tau \geq 1$）場合は、以下の行動をとる。

S_1''-0: もし第 τ 期までの経路が P と一致するならば $c_1^\tau = 1$ を選ぶ。

S_1''-1: もし経路 P から先に逸脱したのがプレイヤー 1 ならば、命題 1 で定義した S_1 に従う。

S_1''-2: もし経路 P から先に逸脱したのがプレイヤー 2 ならば、命題 2 で定義した S_1' に従う。

(S_2'') プレイヤー 2 は、第 τ 期（$\tau \geq 2$ は任意の偶数）における自分の手番で公共財が未完成である（$X_\tau \geq 1$）場合は、以下の行動をとる。

S_2''-0: もし第 τ 期までの経路が P と一致するならば $c_2^\tau = 1$ を選ぶ。

S_2''-1: もし経路 P から先に逸脱したのがプレイヤー 1 ならば、命題 1 で定義した S_2 に従う。

S_2''-2: もし経路 P から先に逸脱したのがプレイヤー 2 ならば、命題 2 で定義した S_2' に従う。

この時、もし $\delta \in (0,1)$ が、

$$\delta \geq (\frac{v_1}{V_1})^{\frac{1}{2v_2-1}} \quad \text{かつ} \quad \delta \geq (\frac{v_2}{V_2})^{\frac{1}{2(v_2-1)}}$$

を満たすほどに充分に 1 に近いならば、プレイヤー 1 の戦略 S_1'' とプレイヤー 2 の戦略 S_2'' の組み合わせは部分ゲーム完全均衡になる。

証明. 本命題の前提条件 $v_1 > v_2 \geq 2$ が満たされていれば、命題 1 と命題 2 における前提条件 $v_1 \geq 1$、$v_2 \geq 1$ も満たされている。また、本命題の δ に関する前提条件について、$(v_1/V_1) \in (0,1)$、$v_1 \geq V_1 - 1$、$V_1 > V_2$ であることから、

$$\delta \geq (\frac{v_1}{V_1})^{\frac{1}{2v_2-1}} \quad \Rightarrow \quad \delta > \frac{v_1}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \delta > \frac{V_1-1}{V_1} \quad \Rightarrow \quad \delta > \frac{V_2-1}{V_2}$$

となり、命題 1 と命題 2 における δ に関する前提条件も満たされている。

まず、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1'' はプレイヤー 2 の戦略 S_2'' に対して最適反応になっていることを示す。この部分ゲームの始点を第 τ 期とする。もし第 τ 期までの経路が P と一致しないとすると、この部分ゲームでプレイされる戦略の組み合わせ (S_1'', S_2'') は、(S_1, S_2) もしくは (S_1', S_2') のいずれかと一致するので、命題 1

と命題 2 より S_1'' は S_2'' に対して最適反応である。そこで、以下では第 τ 期（$\tau \geq 1$）までの経路が P から逸脱していないような部分ゲームを検討する。$1 \geq X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合と、$1 < X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合（この場合は $\tau = 1$ である[*3]）とに分けて考える。以下、プレイヤー 2 の戦略 S_2'' は与件とする。

第一に、$1 \geq X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合を考える。プレイヤー 1 が戦略 S_1'' に従うと、経路 P に示された通り、プレイヤー 1 とプレイヤー 2 が交互に 1 ずつ寄付を続けて公共財が完成する。

仮に、プレイヤー 1 が S_1'' に従った場合とは異なる利得を得るために、第 t 期（$t \geq \tau$）に初めて経路 P から逸脱したとする。この逸脱によって第 t 期以降にプレイヤー 1 が得る利得の第 t 期時点での現在価値を $\hat{U}_1$ とする。もし第 t 期に公共財が完成するならば、$\hat{U}_1 \leq V_1 - X_t$ が成り立つ。もし第 $t+1$ 期へとゲームが続くならば、この期以降プレイヤー 2 は S_2 をとるので、これに対するプレイヤー 1 の最適反応は命題 1 より S_1 である。この時プレイヤー 1 が第 $t+1$ 期以降に得る利得は「プレイヤー 1 に不利な均衡」で得る利得であるので、第 t 期時点の現在価値で評価した $\hat{U}_1$ について、$\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - X_t)$、もしくは $\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - v_1)$、もしくは $\hat{U}_1 \leq 0$ のいずれかが成り立つ。

次に、プレイヤー 1 が S_1'' に従った時に第 t 期以降に得る利得の第 t 期時点での現在価値 U_1'' を検討する。この場合、ゲームは経路 P を辿るが、毎期 1 ずつ寄付が行われるので、第 t 期からみて X_t 期後には公共財は完成する。$X_t \leq 2v_2 - 1$ であるので、公共財は遅くとも $2v_2 - 1$ 期後には完成し、それまでにプレイヤー 1 が「1」を支払う回数は多くとも v_2 回であるので、

$$U_1'' > -v_2 + \delta^{2v_2-1}V_1$$

が成り立つ。また、

$$\delta \geq (\frac{v_1}{V_1})^{\frac{1}{2v_2-1}} \quad \Rightarrow \quad \delta^{2v_2-1}V_1 \geq v_1$$

であり、さらに v_1 も v_2 も整数で、$v_1 > v_2$ であることから

$$U_1'' > -v_2 + \delta^{2v_2-1}V_1 \geq -v_2 + v_1 \geq 1$$

となる。これにより、$\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - v_1)$ もしくは $\hat{U}_1 \leq 0$ のいずれかが成り立つ場合には、$U_1'' > 1 > \hat{U}_1$ が得られる。

また、$U_1'' \geq V_1 - X_t$ となることを以下に示す。$X_t = 1$ である場合は $U_1'' = V_1 - 1$ であるの

[*3] 経路 P に沿ってゲームが進む場合、第 2 期初には $X_2 \leq 2(v_2 - 1)$ となるためである。

でこの不等式は明らかに成り立つ。$X_t = 2$ である場合は、$U_1'' = -1 + \delta V_1$ であるが、

$$\delta > \frac{V_1 - 1}{V_1} \quad \Rightarrow \quad -1 + \delta V_1 > V_1 - 2$$

となるので、$U_1'' > V_1 - X_t$ が成立する。$X_t \geq 3$ である場合は、第 t 期からみて遅くとも $2v_2 - 1$ 期後には公共財は完成すること、それまでにプレイヤー 1 が「1」を支払う回数は、X_t が偶数である時は $X_t/2$ 回、X_t が奇数である時は $(X_t + 1)/2$ 回であるので、

$$U_1'' > -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + \delta^{2v_2 - 1} V_1$$

が成り立つ。さらに、$\delta^{2v_2-1} V_1 \geq v_1 \geq V_1 - 1$ であること、$-3/2 \geq -X_t/2$ であることに注意すると、

$$U_1'' > -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + \delta^{2v_2-1} V_1 \geq -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + V_1 - 1 \geq -\frac{X_t}{2} - \frac{X_t}{2} + V_1 = V_1 - X_t$$

が成立する。以上の議論より X_t の値に拘らず $U_1'' \geq V_1 - X_t$ となることが示されたが、これを用いると $\hat{U}_1 \leq V_1 - X_t$ もしくは $\hat{U}_1 \leq \delta^2 (V_1 - X_t)$ のいずれかが成り立つ場合は $U_1'' \geq V_1 - X_t \geq \hat{U}_1$ が得られる。この結果と前段落の結果を合わせると、常に $U_1'' \geq \hat{U}_1$ が成り立つので、経路 P から逸脱することによってプレイヤー 1 の利得が上がることはない。すなわち、第 τ 期（$\tau \geq 1$）までの経路が P から逸脱していないような部分ゲームにおいて、$1 \geq X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合、プレイヤー 1 にとって S_1'' が S_2'' に対する最適反応であることが示された。

第二に、$1 < X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合を考える。この場合は $\tau = 1$ である。プレイヤー 1 が戦略 S_1'' に従うと、経路 P に示された通り、第 1 期にプレイヤー 1 が $K - 2(v_2 - 1)$ を寄付して、第 2 期以降はプレイヤー 2 とプレイヤー 1 が交互に 1 ずつ寄付を続けて公共財が完成する。

仮に、プレイヤー 1 が S_1'' に従った場合とは異なる利得を得るために、第 t 期（$t \geq 1$）に初めて経路 P から逸脱したとする。$t \geq 3$ の時は、「$1 \geq X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合」を考察した時と同様の議論から、経路 P から逸脱することによってプレイヤー 1 の利得が上がることはない。そこで以下では、プレイヤー 1 が第 1 期に経路 P から逸脱する場合を検討する。この逸脱によってプレイヤー 1 がゲーム全体で得る利得の第 1 期時点での現在価値を $\hat{U}_1$ とする。もし第 1 期に公共財が完成するならば、$\hat{U}_1 \leq V_1 - K$ が成り立つ。もし第 2 期へとゲームが続くならば、この期以降プレイヤー 2 は S_2 をとるので、これに対するプレイヤー 1 の最適反応は命題 1 より S_1 である。この時プレイヤー 1 が第 2 期以降に得る利得は「プレイヤー 1 に不利な均衡」で得る利得であるので、第 1 期時点の現在価値で評価した $\hat{U}_1$ について、$\hat{U}_1 \leq \delta^2 (V_1 - K)$、も

しくは $\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - v_1)$、もしくは $\hat{U}_1 \leq 0$ のいずれかが成り立つ。

次に、プレイヤー 1 が S_1'' に従った時にゲーム全体で得る利得の第 1 期時点での現在価値 U_1'' を検討する。この場合、ゲームは経路 P を辿り、遅くとも第 $2v_2 - 1$ 期には公共財が完成する。プレイヤー 1 は第 1 期に $K - 2(v_2 - 1)$ を支払い、また第 3 期以降に「1」を支払う回数は多くとも $v_2 - 1$ 回であるので、

$$U_1'' > -K + 2(v_2 - 1) - (v_2 - 1) + \delta^{2v_2 - 1} V_1$$

が成り立つ。また、$\delta^{2v_2-1} V_1 \geq v_1$ および $K \leq v_1 + v_2 - 2$ を用いて、

$$U_1'' > -K + 2(v_2 - 1) - (v_2 - 1) + \delta^{2v_2 - 1} V_1 \geq -K + v_2 - 1 + v_1 \geq 1$$

を得る。これにより、$\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - v_1)$ もしくは $\hat{U}_1 \leq 0$ のいずれかが成り立つ場合には、$U_1'' > 1 > \hat{U}_1$ となる。また、$v_2 \geq 2$ ゆえに $v_2 - 1 \geq 1$ であるので、

$$U_1'' > -K + v_2 - 1 + v_1 \geq -K + 1 + v_1 \geq -K + V_1$$

を得る。これにより、$\hat{U}_1 \leq V_1 - K$ もしくは $\hat{U}_1 \leq \delta^2(V_1 - K)$ のいずれかが成り立つ場合は $U_1'' > V_1 - K \geq \hat{U}_1$ となる。以上の議論から、常に $U_1'' > \hat{U}_1$ が成り立つので、経路 P から逸脱することによってプレイヤー 1 の利得が上がることはない。すなわち、第 τ 期（$\tau \geq 1$）までの経路が P から逸脱していないような部分ゲームにおいて、$1 < X_\tau - 2(v_2 - 1)$ である場合、プレイヤー 1 にとって S_1'' が S_2'' に対する最適反応であることが示された。

ここまで、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1'' はプレイヤー 2 の戦略 S_2'' に対して最適反応になっていることを示した。次に、プレイヤー 2 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 2 の戦略 S_2'' がプレイヤー 1 の戦略 S_1'' に対して最適反応になっていることを示す。この部分ゲームの始点を第 τ 期とする。もし第 τ 期までの経路が P と一致しないとすると、この部分ゲームでプレイされる戦略の組み合わせ (S_1'', S_2'') は、(S_1, S_2) もしくは (S_1', S_2') のいずれかと一致するので、命題 1 と命題 2 より S_2'' は S_1'' に対して最適反応である。そこで、以下では第 τ 期（$\tau \geq 2$）までの経路が P から逸脱していないような部分ゲームを検討する。以下、プレイヤー 1 の戦略 S_1'' は与件とする。

プレイヤー 2 が戦略 S_2'' に従うと、経路 P に示された通り、プレイヤー 2 とプレイヤー 1 が交互に 1 ずつ寄付を続けて公共財が完成する。仮に、プレイヤー 2 が S_2'' に従った場合とは異なる利得を得るために、第 t 期（$t \geq \tau$）に初めて経路 P から逸脱したとする。この逸脱によって第 t 期以降にプレイヤー 2 が得る利得の第 t 期時点での現在価値を $\hat{U}_2$ とする。もし第 t 期に公共財が完成するならば、$\hat{U}_2 \leq V_2 - X_t$ が成り立つ。もし第 $t+1$ 期へとゲームが続くならば、この期

以降プレイヤー1は S_1' をとるので、これに対するプレイヤー2の最適反応は命題2より S_2' である。この時プレイヤー2が第 $t+1$ 期以降に得る利得は「プレイヤー2に不利な均衡」で得る利得であるので、第 t 期時点の現在価値で評価した $\hat{U}_2$ について、$\hat{U}_2 \leq \delta^2(V_2 - X_t)$、もしくは $\hat{U}_2 \leq \delta^2(V_2 - v_2)$、もしくは $\hat{U}_2 \leq 0$ のいずれかが成り立つ。

次に、プレイヤー2が S_2'' に従った時に第 t 期以降に得る利得の第 t 期時点での現在価値 U_2'' を検討する。この場合、ゲームは経路 P を辿るが、毎期1ずつ寄付が行われるので、第 t 期からみて X_t 期後には公共財は完成する。プレイヤー1は S_1'' のもとでは第1期に $\max\{1, K - 2(v_2 - 1)\}$ を支払っているので $X_t \leq 2(v_2 - 1)$ であり、公共財は遅くとも $2(v_2 - 1)$ 期後には完成し、それまでにプレイヤー2が「1」を支払う回数は多くとも $v_2 - 1$ 回である。従って、

$$U_2'' > -(v_2 - 1) + \delta^{2(v_2-1)} V_2$$

が成り立つ。また、

$$\delta \geq \left(\frac{v_2}{V_2}\right)^{\frac{1}{2(v_2-1)}} \quad \Rightarrow \quad \delta^{2(v_2-1)} V_2 \geq v_2$$

であることから、

$$U_2'' > -(v_2 - 1) + \delta^{2(v_2-1)} V_2 \geq -v_2 + 1 + v_2 = 1$$

となる。これにより、$\hat{U}_2 \leq \delta^2(V_2 - v_2)$ もしくは $\hat{U}_2 \leq 0$ のいずれかが成り立つ場合には、$U_2'' > 1 > \hat{U}_2$ が得られる。

また、$U_2'' \geq V_2 - X_t$ となることを以下に示す。$X_t = 1$ である場合は $U_2'' = V_2 - 1$ であるのでこの不等式は明らかに成り立つ。$X_t = 2$ である場合は、$U_2'' = -1 + \delta V_2$ であるが、

$$\delta > \frac{V_2 - 1}{V_2} \quad \Rightarrow \quad -1 + \delta V_2 > V_2 - 2$$

となるので、$U_2'' > V_2 - X_t$ が成立する。$X_t \geq 3$ である場合は、第 t 期からみて遅くとも $2(v_2 - 1)$ 期後には公共財は完成すること、それまでにプレイヤー2が「1」を支払う回数は、X_t が偶数である時は $X_t/2$ 回、X_t が奇数である時は $(X_t + 1)/2$ 回であるので、

$$U_2'' > -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + \delta^{2(v_2-1)} V_2$$

が成り立つ。さらに、$\delta^{2(v_2-1)} V_2 \geq v_2 \geq V_2 - 1$ であること、$-3/2 \geq -X_t/2$ であることに注意すると、

$$U_2'' > -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + \delta^{2(v_2-1)} V_2 \geq -\frac{X_t}{2} - \frac{1}{2} + V_2 - 1 \geq -\frac{X_t}{2} - \frac{X_t}{2} + V_2 = V_2 - X_t$$

が成立する。以上の議論より X_t の値に拘らず $U_2'' \geq V_2 - X_t$ となることが示されたが、

これを用いると $\hat{U}_2 \leq V_2 - X_t$ もしくは $\hat{U}_2 \leq \delta^2(V_2 - X_t)$ のいずれかが成り立つ場合は $U_2'' \geq V_2 - X_t \geq \hat{U}_2$ が得られる。この結果と前段落の結果を合わせると、常に $U_2'' \geq \hat{U}_2$ が成り立つので、経路 P から逸脱することによってプレイヤー 2 の利得が上がることはない。すなわち、第 τ 期（$\tau \geq 2$）までの経路が P から逸脱していないような部分ゲームにおいて、プレイヤー 2 にとって S_2'' が S_1'' に対する最適反応であることが示された。

これまでの議論から、プレイヤー 1 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、プレイヤー 1 の戦略 S_1'' がプレイヤー 2 の戦略 S_2'' に対して最適反応になっており、さらにプレイヤー 2 の手番から始まる任意の部分ゲームについて、S_2'' が S_1'' に対して最適反応になっていることが示された。ゆえに、任意の部分ゲームにおいて (S_1'', S_2'') という戦略の組み合わせは互いに最適反応になっているので、(S_1'', S_2'') は部分ゲーム完全均衡である。 (証明終)

4. 結論

本稿は、Admati and Perry (1991) や Compte and Jehiel (2003) が検討した公共財供給のための自発的寄付ゲームを考察した。そして、支払金額を離散的にしか選ぶことができず、割引因子が充分に 1 に近いという条件のもとでは、ゲームの均衡が複数存在し、その中には少額の寄付が交互に行われるという均衡が存在することを示した。

寄付金が埋没費用であることが「交互支払いパターン」を生むのではないかとの Admati and Perry (1991) の指摘に対して、Compte and Jehiel (2003) は線形な費用関数のもとでは「一括支払いパターン」の均衡しか存在しないことを示していた。しかし、現実には交互支払いパターンが観察されることも多い。本稿の貢献は、支払単位と割引因子の条件次第では「交互支払いパターン」も均衡として支持できることを示した点にある。また、本稿が示した均衡では交互に支払いが行われることから、Compte and Jehiel (2003) の均衡と比較して、費用分担と利得の両面で、より公平な均衡となっているといえよう。

謝辞

本研究は科研費（21730160）の助成を受けたものである。

参考文献

1) Admati, A. R., and Perry, M. (1991). "Joint projects without commitment," *Review of Economic Studies* 58, 259–276.
2) Compte, O., and Jehiel, P. (2003). "Voluntary contributions to a joint project with asymmetric agents," *Journal of Economic Theory* 112, 334–342.